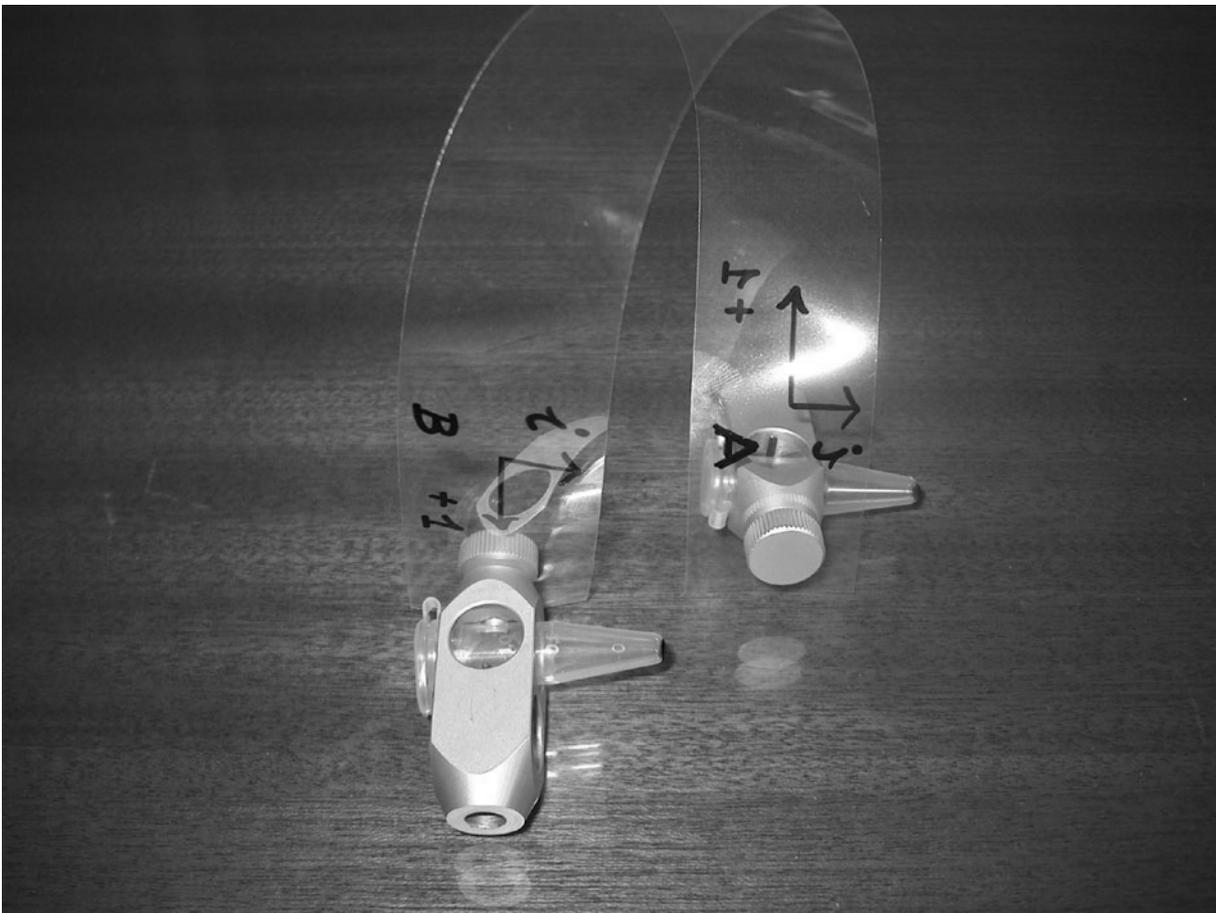


# Spineurs

## à 2 composantes

une

## introduction concrète



Vincent Morin

Université de Bretagne Occidentale

*copyright V.Morin Juillet 2003*

## NOTE PRELIMINAIRE

Ce texte est une brève synthèse de notes personnelles rédigées au milieu des années 1980, et destinées à éclaircir la nature de ces entités mathématiques d'un abord difficile que sont les spineurs. Ce texte ne prétend pas à être exhaustif, mais seulement à présenter les 2-spineurs de rang 1 (vecteurs complexes à 2 composantes) sous une forme très concrète, tout en insistant sur quelques relations très importantes du point de vue de la Physique.

Utilisés en Mécanique Quantique, les spineurs sont presque universellement abordés sous un angle purement formel qui ne donne aucune prise à l'intuition physique et aucune image que l'esprit puisse manipuler. Dans mes propres recherches sur l'unification des théories de la gravitation et quantique, j'ai très tôt ressenti péniblement ce manque de caractère concret qui fait s'interroger de manière incessante sur le pourquoi de ce que l'on fait. Certains ouvrages sont sur ce plan d'une aridité mathématique décourageante. Ce fascicule veut prendre la direction complètement opposée.

A la question « qu'est ce qu'un spineur ? », je n'avais avant 1985 aucune réponse parlante. C'est pourquoi j'ai consacré une énergie assez importante à tenter de mieux répondre à cette question. Il semble que peu d'auteurs aient fait des tentatives comparables, on peut citer R. Penrose avec son image de « flag and pole », Kaufmann et J.A. Wheeler avec la notion de « rotation entanglement ». Il faut croire que les physiciens, obligés de faire des mathématiques, mais qui ont besoin de concepts physiquement parlants sont une minorité, la majorité se satisfaisant, d'une présentation sèche et non intuitive.

## PREAMBULE

L'histoire des spineurs commence en 1913 lorsque Elie Cartan les introduit dans ses recherches sur les représentations linéaires des groupes simples. Ces êtres mathématiques sont nés des considérations abstraites de la théorie des groupes, et sans doute est-ce l'origine de la difficulté avec laquelle le néophyte se familiarise avec la géométrie spinorielle.

Le terme même de géométrie semble inapproprié tant est flagrante l'absence de description « par figures et mouvements », comme disait Descartes. Pourtant, le spineur est un être tout aussi présent à la géométrie euclidienne que le sont les vecteurs et les tenseurs, quoique fort malaisé à saisir. Max Morand avait pris comme parti de faire ressortir le caractère géométrique dans son livre « géométrie spinorielle », mais je crois sans dégager le strict essentiel intuitif.

Les introductions aux spineurs sont révélatrices de la difficulté à les faire appréhender, et j'ai été constamment déçu de ne trouver que des équations posées sans guère d'explication là où l'image faisant défaut, des notions intuitives claires seraient vraiment bienvenues.

Autant le vecteur est pourvu de divers aspects bien associés par l'intuition, autant le spineur est apparemment sans image, et se réduit à un être dont le mystère est dû à sa pure définition technique.

Un vecteur est ainsi un segment orienté, raffiné pour l'espace courbe en vecteur tangent ou opérateur de dérivation partielle suivant le paramètre d'une courbe ; de là il est acceptable de le concevoir comme élément abstrait d'un ensemble satisfaisant aux axiomes de l'espace vectoriel.

Le tenseur est d'approche plus difficile, quoique présenté sous l'aspect d'une machine linéaire dans laquelle on insère vecteurs ou 1-formes pour avoir des tenseurs d'ordre inférieur, vecteurs, formes, scalaires, il est accessible à l'esprit avec suffisamment d'évidence.

Qui a voulu apprendre à travailler avec les spineurs s'est vite aperçu qu'ils semblaient dépourvu de tout cet aspect immédiat qui ancre les choses dans notre réalité. Mais l'intelligence ne peut se satisfaire toujours de la seule définition technique, et demande pour prix du progrès, un nombre d'images concourantes des objets de notre savoir.

De la sorte on peut passer par un pont intuitif d'un formalisme à un autre à un autre, formalismes entre lesquels n'existe aucune continuité technique à un moment donné.

C'est d'ailleurs pour une large part de cette manière que cette recherche intuitive de la nature des 2-spineurs de rang 1 m'a conduit à les associer à la description de la configuration relative de 3 faisceaux de relations entre des éléments binaires dans la pré-géométrie par graphe aléatoire.

## INTRODUCTION

Il est bien connu que les vecteurs ne permettent pas de reproduire la composition des rotations. Si je suppose donné, dans l'espace euclidien à 3 dimensions, un trièdre d'axes (O , x , y , z), tourner un objet de  $\pi$  autour de l'axe (O x) puis du même angle autour de l'axe (O y) ne donne pas une rotation autour de la bissectrice des axes.

Le problème de la loi de combinaison des rotations a été résolu par Hamilton avec ses quaternions. Son idée a été de généraliser à l'espace euclidien tridimensionnel le concept d'opérateur de similitude que les nombres complexes fournissent dans l'espace euclidien plan. Aussi, il introduisit trois nombres hypercomplexes **i** , **j** et **k** satisfaisant aux célèbres relations :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k} = -1$$

et associa à une rotation d'angle  $\theta$  autour d'un vecteur unitaire  $\mathbf{u}=(u^x , u^y , u^z)$  un quaternion :

$$q = \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(u^x \mathbf{i} + u^y \mathbf{j} + u^z \mathbf{k}) \right]$$

de sorte que les rotations successives d'angles respectifs  $\theta$  et  $\phi$  autour de vecteurs unitaires  $\mathbf{a} = (a^x , a^y , a^z)$  puis  $\mathbf{b} = (b^x , b^y , b^z)$  se composent par multiplication des nombres hypercomplexes (quaternions)

$$q'q = \left[ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)(b^x \mathbf{i} + b^y \mathbf{j} + b^z \mathbf{k}) \right] \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(a^x \mathbf{i} + a^y \mathbf{j} + a^z \mathbf{k}) \right]$$

A titre de vérification, on voit bien qu'une rotation directe de  $\theta = \pi$  autour de l'axe (O , x), associée au quaternion  $\mathbf{q} = \mathbf{i}$ , suivie d'une rotation directe de  $\phi = \pi$  autour de (O , y), associée au quaternion  $\mathbf{q}' = \mathbf{j}$ , donne une rotation résultante de  $\pi$  suivant (O , z), cette dernière est effectivement associée  $\mathbf{q}' \mathbf{q} = \mathbf{j} \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ .

Hamilton, cependant, ne donna aucune représentation de ces nombres imaginaires d'une nouvelle sorte et la façon dont il trouva son calcul des quaternions ne semble pas dériver de considérations analogues à celles qui suivent, il eût sinon écrit les matrices correspondantes

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

qui sont simplement liées aux matrices de Pauli :

$$\sigma_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

par les relations suivantes :

$$\mathbf{1} = \sigma_t \quad \mathbf{i} = -i \sigma_x \quad \mathbf{j} = -i \sigma_y \quad \mathbf{k} = -i \sigma_z$$

Un quaternion se représente donc par une matrice à coefficients complexes

$$\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sigma_t - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (a^x \sigma_x + a^y \sigma_y + a^z \sigma_z)$$

Il est facile de vérifier que l'on a:

$$\begin{aligned}\sigma_x \sigma_x &= \sigma_y \sigma_y = \sigma_z \sigma_z = \sigma_x \sigma_y \sigma_z = \sigma_t \\ \sigma_x \sigma_y &= -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z \\ \sigma_y \sigma_z &= -\sigma_z \sigma_y = i\sigma_x \\ \sigma_z \sigma_x &= -\sigma_x \sigma_z = i\sigma_y\end{aligned}$$

Bien que la notation en soit alourdie, on note parfois les matrices de Pauli avec leurs indices matriciels (le premier indice A est celui des lignes mis en haut, le second B celui des colonnes mis en bas, chaque indice vaut 0 ou 1) :

$$\left[ (\sigma_t)^A_B \right] \quad \left[ (\sigma_x)^A_B \right] \quad \left[ (\sigma_y)^A_B \right] \quad \left[ (\sigma_z)^A_B \right]$$

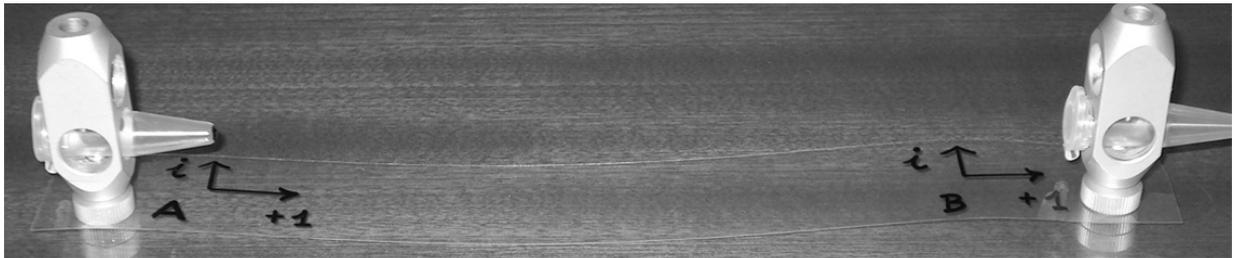
Cette représentation des nombres de Hamilton par des matrices 2x2 à coefficients complexes a l'avantage de rendre très claires les opérations d'addition et de multiplication qui sont les opérations habituelles d'addition et multiplication matricielles.

Avant de reprendre la question du repérage et de la composition des rotations, je voudrais donner l'idée directrice qui m'a conduit à donner à un spineur l'image du repérage par la bande complexe. Les débats sur l'éther comme milieu interactionnel, facteur de liaison entre des éléments de substance, ont donné lieu à des conceptions très diverses. Pour ma part, s'est imposée à moi l'idée d'échanges à caractère angulaire et l'intuition d'un milieu hors de toute géométrie prédéfinie dans lequel les rotations sont relatives et les objets en interaction par de nombreuses relations angulaires. Il m'est donc venu d'examiner si un spineur n'était pas une manière de repérer les rotations relatives. Or je vais montrer que c'est une voie praticable et intéressante.

Je vais donc supposer qu'entre deux objets tournant relativement l'un par rapport à l'autre, il existe un lien auquel on rapporte les rotations des objets. Les positions absolues des objets n'ont par ailleurs aucune importance, seules comptent les configurations angulaires relatives, la séparation radiale et leurs repérages sur le lien intermédiaire aux objets.

## LE REPERAGE PAR LA BANDE COMPLEXE

Pour bien fixer les idées, prenons une bande plastique fine et résistante (celluloïd de transparent). Sur cette bande traçons un repère du plan complexe, un axe réel avec l'indication du 1 et un axe perpendiculaire avec indication du  $i$ . Prenons également deux objets identiques pourvus d'un curseur quelconque qui puissent être attachés à chaque extrémité de la bande et tourner dans son plan. La photo suivante montre une réalisation avec des pièces d'assemblage optique (les objets tournants  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ ), des cônes plastiques (les curseurs) et une bande de transparent à rétroprojecteur :



J'appellerai la bande plastique « bande complexe » parce qu'avec son repère complexe, c'est une portion du plan d'Argand-Cauchy. La bande complexe constitue une référence sur laquelle la position des curseurs peut être lue. Sur la photo du dessus, les curseurs sont dans la direction du 1, donc la configuration des deux objets  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  peut être représentée par un vecteur colonne :

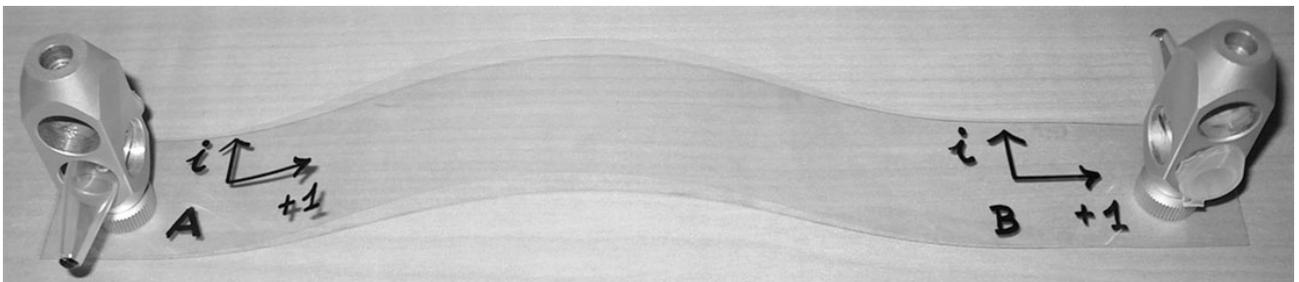
$$\boldsymbol{\eta} = [\eta^A] = \begin{bmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'indice  $A$  vaut 0 pour le coefficient du haut (correspondant à l'objet de gauche  $\mathcal{A}$ ), il vaut 1 pour le coefficient du bas (correspondant à l'objet de droite  $\mathcal{B}$ ). Je vais montrer dans la suite que ce vecteur colonne qui représente la configuration relative des deux objets, c'est un spineur.

Je suppose que l'axe  $z$  est vertical, perpendiculaire à la table sur la photo. L'axe  $x$  est horizontal de gauche à droite. L'axe  $y$  va vers le fond de la photo.

### Rotations selon $z$

Si je tourne l'objet  $\mathcal{A}$  dans le sens horaire de  $\pi/2$  et l'objet  $\mathcal{B}$  dans l'autre sens (anti-horaire ou trigonométrique) du même angle. Il apparaît tout de suite que le curseur de  $\mathcal{A}$  vient suivant  $-i$  sur la bande complexe, et le curseur de  $\mathcal{B}$  sur  $+i$ . Or  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont maintenant tournés l'un vis à vis de l'autre de l'angle relatif  $\pi$ .  $\mathcal{B}$  ayant tourné de cet angle  $\pi$  dans le sens trigonométrique par rapport à  $\mathcal{A}$ . Comme ceci :



La configuration obtenue est représentée par le vecteur colonne (spineur)  $\boldsymbol{\xi} = [\xi^A]$  qui se déduit du spineur initial  $\boldsymbol{\eta} = [\eta^B]$  par l'application de la matrice  $\mathbf{k}$  :

$$\xi = \mathbf{k} \boldsymbol{\eta} = [\xi^A] = [k^A_B][\eta^B] = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ i \end{bmatrix}$$

Si au lieu de tourner  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  chacun de  $\pi/2$  on ne les avait tournés que de  $\pi/4$ , la configuration finale avec  $\mathcal{B}$  tourné de  $\pi/2$  dans le sens trigonométrique par rapport à  $\mathcal{A}$  eût été :

$$\xi' = \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{1} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \mathbf{k} \right] \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 - i \\ 1 + i \end{bmatrix}$$

Il est donc clair que pour ce qui concerne les rotations suivant l'axe z, un repérage relatif par la lecture des curseurs sur la bande complexe (les deux valeurs étant mises dans un vecteur colonne à coefficients complexes) permet de calculer l'effet d'une rotation d'un angle quelconque  $\theta$  de  $\mathcal{B}$  par rapport à  $\mathcal{A}$  autour de cet axe z en appliquant la matrice :

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

Mais cette matrice s'écrit de façon équivalente :

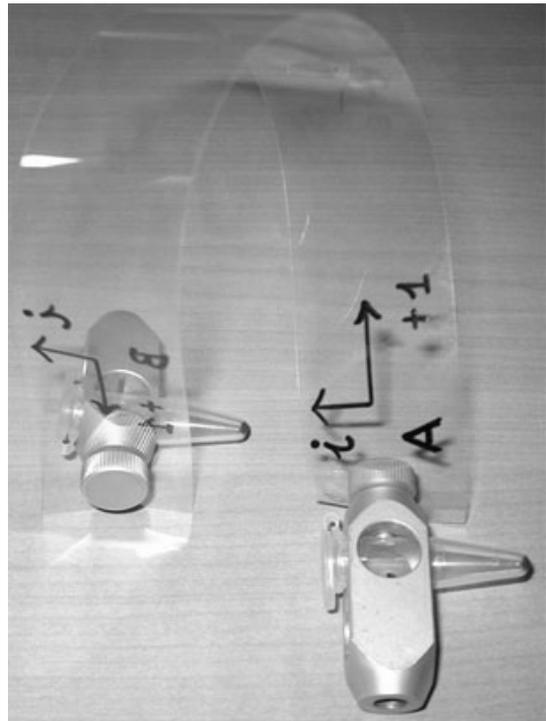
$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \boldsymbol{\sigma}_t - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}$$

### Rotations suivant x

Si je tourne l'objet  $\mathcal{B}$  de  $\pi/2$  dans le sens trigonométrique en tordant la bande suivant l'axe x, et l'objet  $\mathcal{A}$  dans l'autre sens, il est difficile de procéder car le plastique résiste à la torsion et de toute façon on ne pourrait ainsi tordre indéfiniment la bande avec l'angle croissant.

En fait on s'aperçoit que la configuration relative ayant  $\mathcal{B}$  tourné de  $\pi$  par rapport à  $\mathcal{A}$  s'obtient facilement à condition d'accepter de mettre  $\mathcal{B}$  à gauche et  $\mathcal{A}$  à droite, de sorte que la bande forme un « U ». De la sorte d'ailleurs, la poursuite de la rotation donne une configuration simple pour la rotation relative de  $2\pi$  et un retour à la configuration initiale de la bande pour une rotation de  $4\pi$ .

L'objet de gauche ( $\mathcal{B}$ ) a son curseur sur  $-i$  et l'objet de droite ( $\mathcal{A}$ ) également, comme ceci :



On a donc obtenu la configuration finale  $\xi$  en appliquant la matrice de rotation  $\mathbf{i}$  qui permute les coefficients de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  (puisque les objets eux mêmes ont permuté) :

$$\xi = \mathbf{i}\eta = -i\sigma_x\eta = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ -i \end{bmatrix}$$

Bien que ce soit moins évident que pour l'axe z, on peut vérifier cependant que pour toute rotation suivant l'axe x, on obtient la configuration finale par application à la configuration de départ de la matrice suivante:

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sigma_t - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sigma_x$$

De plus, toute séquence de rotations suivant z ou x transforme la configuration de départ par application de la séquence correspondante des matrices (opérateurs de rotation ou quaternions).

### Rotations générales

De façon générale, une rotation d'un angle  $\theta$  autour d'un axe de vecteur unitaire  $\mathbf{u} = (u^x, u^y, u^z)$  agit sur le spineur de configuration  $\eta$  par la matrice du quaternion :

$$\mathbf{R}_u(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sigma_t - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (u^x \sigma_x + u^y \sigma_y + u^z \sigma_z) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i u^z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (i u^x + u^y) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (-i u^x + u^y) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i u^z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

C'est ainsi qu'une rotation relative de  $\theta = \pi$  suivant l'axe (O, y) de vecteur unitaire directeur  $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$ , agit par :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}_y}(\pi) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

qui est la matrice  $\mathbf{j}$  et qui transforme, par exemple, la configuration relative des objets  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  dont les deux curseurs sont suivant 1 sur la bande complexe en une configuration avec  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  permutés et les curseurs de gauche et de droite suivant -1 et 1 respectivement

$$\mathbf{j}\eta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \xi$$

L'application d'une rotation générale, s'écrit avec les indices

$$[\xi^A] = [\mathbf{R}_u(\theta)^A_B] [\eta^B]$$

Ou en abrégé (avec convention de sommation sur les indices répétés en haut et en bas), pour dire que la rotation  $\mathbf{R}$  est appliquée au spineur  $\eta$  pour donner le spineur  $\xi$  :

$$\xi^A = R^A_B \eta^B$$

### Spineurs conjugués

Au lieu de tracer le repère sur le dessus de la bande complexe, on aurait pu retourner la bande en la tournant autour de (O, x) et tracer ce repère dessous. On constate d'ailleurs en le faisant que l'axe imaginaire du dessous est en sens opposé de celui du dessus (conjugué). Si au lieu de lire la position des curseurs sur le repère du dessus de la bande, on lit sur le repère du dessous, on obtient un repérage différent, conjugué, que

l'on note avec des indices pointés et une barre sur le symbole du spineur d'origine. Par exemple pour la position standard (donnée à l'origine par  $\eta$ ) mais lue sur le repère du dessous on a le repérage:

$$\bar{\eta} = \begin{bmatrix} -\dot{A} \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{0} \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Pour une rotation donnée, il faut alors utiliser les matrices conjuguées, identiques aux premières sauf  $\sigma_y$  :

$$\begin{bmatrix} (\bar{\sigma}_t)_{\dot{B}} \\ \bar{\sigma}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{\sigma}_x)_{\dot{B}} \\ \bar{\sigma}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{\sigma}_y)_{\dot{B}} \\ \bar{\sigma}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{\sigma}_z)_{\dot{B}} \\ \bar{\sigma}_t \end{bmatrix}$$

pour de tels spineurs pointés, la formule abrégée analogue à celle précédente (pour l'application d'une rotation à un spineur non pointé), s'écrit:

$$\bar{\xi}^{\dot{A}} = R^{\dot{A}}_{\dot{B}} \bar{\eta}^{\dot{B}}$$

### Spineurs unitaires ou de module arbitraire

On voit donc qu'un spineur représente le repérage de la position relative en rotation de deux objets par deux curseurs solidaires de ces objets devant lesquels on lit une valeur complexe sur la bande complexe qui lie les deux objets.

Mais, jusqu'à présent, seuls les angles des curseurs ont été pris en compte, et les transformations par les matrices de rotation font en sorte qu'il y a constance de l'expression suivante appelée module d'un spineur  $\xi$  :

$$\xi^0 \bar{\xi}^0 + \xi^1 \bar{\xi}^1$$

C'est à dire que la somme des modules des composantes complexes reste constante lorsque le spineur est transformé par rotation. Si la constante en question est 1, on dit que le spineur est unitaire.

Il est tout à fait possible de changer le module du spineur, qui peut s'interpréter comme une distance entre les objets (comme si la longueur de la bande complexe était en proportion de ce module). On va d'ailleurs voir plus loin que le module du spineur est en fait 2 fois la composante  $u^t$  temporelle d'un quadrivecteur  $\mathbf{u}$  associé à  $\xi$ .

Une application très remarquable de cette possibilité est la suivante : en changeant les termes « cos » et « -i sin » (fonctions de l'angle de rotation  $\theta$ ) en fonctions hyperboliques « ch » et « sh » du paramètre relativiste de vitesse  $\alpha = \text{argth}(v/c)$ , on obtient un opérateur qui présente une analogie avec l'opérateur de rotation, sauf qu'il représente un changement de vitesse (de repère inertiel) dans la direction du vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{u}}(\alpha) = ch\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sigma_t + sh\left(\frac{\alpha}{2}\right) (u^x \sigma_x + u^y \sigma_y + u^z \sigma_z) = \begin{bmatrix} ch\left(\frac{\alpha}{2}\right) + u^z sh\left(\frac{\alpha}{2}\right) & sh\left(\frac{\alpha}{2}\right) (u^x - i u^y) \\ sh\left(\frac{\alpha}{2}\right) (u^x + i u^y) & ch\left(\frac{\alpha}{2}\right) - u^z sh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{bmatrix}$$

La justification de cette expression sera donnée plus loin, après que l'on ait vu comment associer un vecteur à un 2-spineur de rang 2 produit tensoriel de deux 2-spineurs de rang 1, l'un non pointé et l'autre pointé..

On appelle cette transformation, transformation de Lorentz. Cette fois, à cause des propriétés des fonctions hyperboliques, le module des composantes d'un spineur est changé. Par exemple, une transformation de Lorentz suivant z (vitesse relative dirigée suivant l'axe z) et de paramètre 0,8 ( $v=0,664 c$ ) a pour opérateur associé :

$$\mathbf{L}_z(0,8) = ch(0,4) \boldsymbol{\sigma}_t + sh(0,4) \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{bmatrix} ch(0,4) + sh(0,4) & 0 \\ 0 & ch(0,4) - sh(0,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,492 & \\ & 0,670 \end{bmatrix}$$

et appliquée à une configuration standard cela donne

$$\mathbf{L}_z(0,8) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,492 \\ 0,670 \end{bmatrix}$$

Un coefficient voit son module réduit, l'autre allongé. C'est une constatation très étrange d'un point de vue physique, et l'on peut se demander comment interpréter cette progression en sens inverse des valeurs de chaque curseur si l'on en revient au modèle de la bande complexe. Mais pour faire une telle interprétation il faut passer à une définition plus abstraite de la bande complexe et des curseurs comme celle des faisceaux relationnels en pré-géométrie par graphe aléatoire où tous ces éléments matériels, qui donnent ici une image commode, ne peuvent plus être utilisés (il n'y a plus de matière ni de géométrie) et doivent être remplacés par des faisceaux de relations auxquels on attache des nombres complexes.

Comme avant, un spineur conjugué est transformé par l'opérateur conjugué

$$\overline{\mathbf{L}}_u(\alpha) = ch\left(\frac{\alpha}{2}\right) \overline{\boldsymbol{\sigma}}_t + sh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left( u^x \overline{\boldsymbol{\sigma}}_x + u^y \overline{\boldsymbol{\sigma}}_y + u^z \overline{\boldsymbol{\sigma}}_z \right) = \begin{bmatrix} ch\left(\frac{\alpha}{2}\right) + u^z sh\left(\frac{\alpha}{2}\right) & sh\left(\frac{\alpha}{2}\right) (u^x + i u^y) \\ sh\left(\frac{\alpha}{2}\right) (u^x - i u^y) & ch\left(\frac{\alpha}{2}\right) - u^z sh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Cette possibilité de représenter, avec le même procédé que celui de la rotation spatiale, le changement de vitesse relative a quelque chose de stupéfiant à première vue. Déjà avec les quaternions, apparaissait la possibilité de traiter le scalaire (le facteur en  $\boldsymbol{\sigma}_t$ ) comme un temps sur la base de ce qu'associé à un vecteur spatial  $\mathbf{v}$ , pour former un quadrivecteur  $\mathbf{V}$  on peut écrire :

$$\mathbf{V} \mathbf{V}^\# = \left[ t \mathbf{1} - i (v^x \boldsymbol{\sigma}_x + v^y \boldsymbol{\sigma}_y + v^z \boldsymbol{\sigma}_z) \right] \left[ t \mathbf{1} + i (v^x \boldsymbol{\sigma}_x + v^y \boldsymbol{\sigma}_y + v^z \boldsymbol{\sigma}_z) \right] = t^2 - v^x{}^2 - v^y{}^2 - v^z{}^2$$

qui est le module du quadrivecteur  $\mathbf{V} = (t, \mathbf{v})$  dans l'espace-temps relativiste.

Parvenus à ce point, il ressort ainsi l'impression que les spineurs reflètent une relation d'espace-temps à la fois en rotation spatiale relative et en distance selon un cône de lumière (ce sont en fait les distances dont nous avons l'expérience directe puisque nous ne voyons notre entourage qu'avec un retard dû à la vitesse de propagation finie de la lumière). De fait on va voir qu'un vecteur lumière (de module nul, ou placé sur le cône de lumière) est associé à un spineur.

### **Notation exponentielle**

Faisons une remarque incidente : il est habituel d'écrire un nombre complexe de module 1 sous la forme d'une exponentielle complexe :

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$$

Au vu de la forme de l'opérateur pour une rotation d'angle  $\theta$  autour d'un vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ , une généralisation formelle de la notation exponentielle des nombres complexes est possible :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}}(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sigma_t - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (u^x \sigma_x + u^y \sigma_y + u^z \sigma_z) = e^{-i\frac{\theta}{2} \mathbf{u}}$$

où l'on a remplacé le seul angle  $\theta$  par un vecteur  $-(\theta/2) \mathbf{u}$ .

Pour la transformation de Lorentz, une écriture comparable est possible avec une exponentielle non imaginaire :

$$\mathbf{L}_{\mathbf{u}}(\alpha) = ch\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sigma_t + sh\left(\frac{\alpha}{2}\right) (u^x \sigma_x + u^y \sigma_y + u^z \sigma_z) = e^{\frac{\alpha}{2} \mathbf{u}}$$

**N.B. :** la notation exponentielle présente un danger : on ne peut faire la somme des exposants que si les deux rotations se font selon le même axe. Sinon, comme l'ordre des rotations importe, deux exponentielles pour deux rotations d'axes différents ne peuvent pas se réduire à une seule exponentielle d'exposant somme.

$$\left( e^{-i\frac{\omega}{2} \mathbf{u}_x} \right) \left( e^{-i\frac{\theta}{2} \mathbf{u}_z} \right) \quad \text{N'EST GÉNÉRALEMENT PAS} \quad e^{-i\left(\frac{\omega}{2} \mathbf{u}_x + \frac{\theta}{2} \mathbf{u}_z\right)}$$

Lorsque l'on utilise cette notation, il faut se résoudre à laisser séparés les termes d'un produit ; on les entoure parfois de parenthèses comme pour souligner ce point.

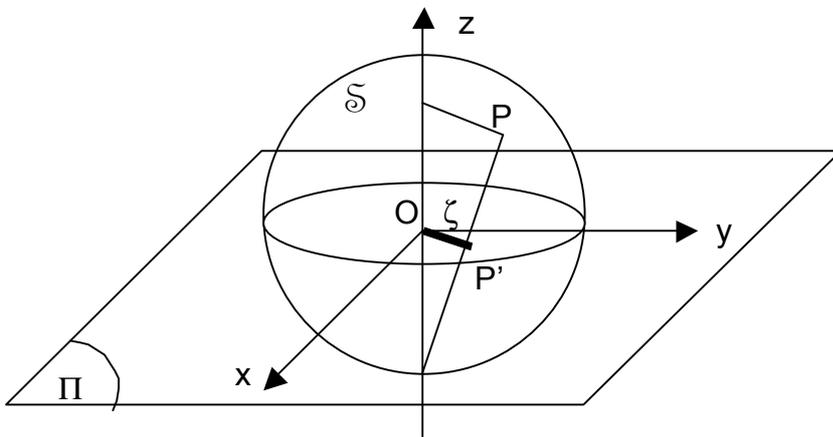
## Introductions usuelles des spineurs

Les divers auteurs d'ouvrages de présentation du calcul spinoriel introduisent la notion de spineur à l'aide de l'un des deux procédés suivants : la projection stéréographique ou le plan polarisé. Aucun de ces procédés ne ressemble à l'introduction très concrète utilisée ici, et tous ont en commun un caractère purement mathématique, donc très artificiel d'un point de vue physique. Cependant, une fois l'intuition physique de la nature d'un spineur acquise, il faut examiner les présentations classiques car elles justifient certaines associations importantes.

### La projection stéréographique

Cette manière d'introduire le spineur à 2 composantes met au jour la relation entre un spineur et le quadrivecteur lumière qui lui est associé. Je modifie légèrement la présentation habituelle en ne prenant pas une sphère de rayon 1 mais de rayon  $t$ , pour plus de généralité.

Soit une sphère  $\mathfrak{S}$  de rayon  $t$ , de centre  $O$ , d'axe polaire  $(O, z)$ , et coupée à l'équateur par le plan complexe  $\Pi$  d'axe réel  $(O, x)$  et d'axe imaginaire  $(O, y)$ . Considérons sur  $S$  un point  $P$  de coordonnées  $(x, y, z)$ . Traçons une droite  $D$  passant par le pôle sud de  $S$  et  $P$ .  $D$  perce  $\Pi$  en un point  $P'$  de coordonnées  $(x', y', z')$ . On dit que  $P'$  est la projection stéréographique de  $P$ . Tout point de  $S$  peut ainsi être transformé, le pôle sud de  $S$  étant envoyé à l'infini, le pôle nord envoyé en  $O$  et l'équateur de  $S$  envoyé sur lui-même. La figure suivante montre ceci :



$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

$$\zeta = x' + i y'$$

$$\frac{t}{t+z} = \frac{\zeta}{x + i y} = \frac{\bar{\zeta}}{x - i y}$$

donc

$$\frac{t^2}{(t+z)^2} = \frac{\zeta \bar{\zeta}}{x^2 + y^2}$$

puis

$$z = t \frac{t^2 - \zeta \bar{\zeta}}{t^2 + \zeta \bar{\zeta}}$$

Posons :  $\zeta = t \frac{(\xi^1)}{(\xi^0)}$

Parce que  $\zeta$  est défini par un rapport, on est libre de choisir  $\xi^0$  et  $\xi^1$  pour que :  $\frac{1}{2} (\xi^0 \bar{\xi}^0 + \xi^1 \bar{\xi}^1) = t$

Il vient ainsi :  $z = \frac{1}{2} (\xi^0 \bar{\xi}^0 - \xi^1 \bar{\xi}^1)$

Et comme :  $x + iy = \zeta (t + z)$   $x - iy = \bar{\zeta} (t + z)$ , on a :  $x = \frac{1}{2} (\xi^0 \bar{\xi}^1 + \bar{\xi}^0 \xi^1)$   $y = \frac{i}{2} (\xi^0 \bar{\xi}^1 - \bar{\xi}^0 \xi^1)$

Finalement, on a ces très importantes relations qui donnent les composantes d'un quadrivecteur lumière associé à un 2-spineur de rang 1 :

$$t = \frac{1}{2} (\xi^0 \bar{\xi}^0 + \xi^1 \bar{\xi}^1) \quad x = \frac{1}{2} (\xi^0 \bar{\xi}^1 + \bar{\xi}^0 \xi^1) \quad y = \frac{i}{2} (\xi^0 \bar{\xi}^1 - \bar{\xi}^0 \xi^1) \quad z = \frac{1}{2} (\xi^0 \bar{\xi}^0 - \xi^1 \bar{\xi}^1)$$

On voit ainsi très clairement comment un quadrivecteur lumière (puisqu'il vérifie  $t^2-x^2-y^2-z^2=0$ ) peut être associé à un spineur. Or toutes les séparations qui nous sont familières ne sont pas des séparations spatiales, mais des séparations lumières (nous voyons notre entourage avec un certain retard).

La « null pole formula » de R.Penrose est équivalente mais en procédant de la manière suivante.

Du spineur  $\xi$  (un 2-spineur de rang 1) on peut former une matrice (qui est un 2-spineur de rang 2 avec un indice de colonne pointé) par produit tensoriel :

$$(\xi \otimes \bar{\xi})^{A\dot{B}} = \begin{bmatrix} \xi^0 \bar{\xi}^0 & \xi^0 \bar{\xi}^1 \\ \xi^1 \bar{\xi}^0 & \xi^1 \bar{\xi}^1 \end{bmatrix}$$

Les relations tirées de la projection stéréographique permettent d'écrire pour le vecteur  $\mathbf{a} = (a^\alpha) = (t, x, y, z)$  correspondant :

$$t + z = \xi^0 \bar{\xi}^0 \quad t - z = \xi^1 \bar{\xi}^1 \quad x - iy = \xi^0 \bar{\xi}^1 \quad x + iy = \xi^1 \bar{\xi}^0$$

Ce qui permet de faire l'association (écrite comme une égalité) :

$$\mathbf{a} = (a^{A\dot{U}}) = \begin{bmatrix} t + z & x - iy \\ x + iy & t - z \end{bmatrix} = (\xi \otimes \bar{\xi})^{A\dot{B}}$$

Cette association pouvant aussi s'écrire :

$$\mathbf{a} = a^\alpha \left( \sigma_\alpha^{A\dot{U}} \right)$$

Mais on définit ainsi une autre sorte de matrice  $\sigma$  à deux indices hauts dont le second est pointé, et qui a cependant le même contenu que les  $\sigma$  à un indice haut et un bas non pointés servant aux rotations ou aux transformations de Lorentz (ce qui fait qu'elles sont souvent confondues)

$$\left( \sigma_\alpha^A \right)_U = \left( \sigma_\alpha^{A\dot{U}} \right)$$

### **Introduction par le plan orienté**

Soient  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  deux vecteurs de l'espace euclidien à 3 dimensions, de même origine O et de même module. Ces deux vecteurs pris dans un ordre défini, forment une surface (un carré) orientée.

L'artifice suivant est utilisé pour manipuler algébriquement ce doublet de vecteurs on forme la quantité :

$$\mathbf{b} = (x, y, z) = \mathbf{v}_1 + i \mathbf{v}_2 = (x_1 + i x_2, y_1 + i y_2, z_1 + i z_2)$$

Une sorte de vecteur complexe de norme nulle  $\mathbf{c} \mathbf{b}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 0$  (un vecteur isotrope).

Si l'on pose :

$$x + iy = -2(\xi^1)^2 \quad x - iy = +2(\xi^0)^2$$

Alors en ajoutant et retranchant les expressions, et avec la définition de  $z$  par son carré (qui laisse le signe indéterminé) :

$$x = x_1 + ix_2 = (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 \quad y = y_1 + iy_2 = i((\xi^0)^2 + (\xi^1)^2) \quad z = z_1 + iz_2 = \pm(\xi^0)(\xi^1)$$

puis en conjuguant :

$$\bar{x} = x_1 - ix_2 = (\bar{\xi}^0)^2 - (\bar{\xi}^1)^2 \quad \bar{y} = y_1 - iy_2 = -i((\bar{\xi}^0)^2 + (\bar{\xi}^1)^2) \quad \bar{z} = z_1 - iz_2 = \pm(\bar{\xi}^0)(\bar{\xi}^1)$$

Et finalement par addition et soustraction :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left[ (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 + (\bar{\xi}^0)^2 - (\bar{\xi}^1)^2 \right] & y_1 &= \frac{i}{2} \left[ (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\bar{\xi}^0)^2 + (\bar{\xi}^1)^2 \right] & z_1 &= \pm \left[ (\xi^0)(\xi^1) + (\bar{\xi}^1)(\bar{\xi}^2) \right] \\ x_2 &= \frac{i}{2} \left[ -(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\bar{\xi}^0)^2 - (\bar{\xi}^1)^2 \right] & y_2 &= \frac{1}{2} \left[ (\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\bar{\xi}^0)^2 + (\bar{\xi}^1)^2 \right] & z_2 &= \pm \left[ (\xi^0)(\xi^1) - (\bar{\xi}^1)(\bar{\xi}^2) \right] \end{aligned}$$

C'est à dire que le spineur  $\xi$  permet de définir un plan polarisé formé par deux vecteurs spatiaux de même module pris dans un ordre donné.

En fait ce n'est pas une surprise dans la mesure où l'on sait déjà qu'à un spineur peut être associé un quadrivecteur lumière, donc un vecteur 3D, disons  $\mathbf{v}_3$ , et que si l'on cherche  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  de sorte que :

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - y_2 x_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \xi^0 \bar{\xi}^1 + \bar{\xi}^0 \xi^1 \\ i(\xi^0 \bar{\xi}^1 - \bar{\xi}^0 \xi^1) \\ \xi^0 \xi^0 - \bar{\xi}^1 \bar{\xi}^1 \end{bmatrix}$$

Avec les 3 équations supplémentaires pour l'égalité des modules et la perpendicularité  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  :

$$\mathbf{v}_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \sqrt{\|\mathbf{v}_3\|} \quad \mathbf{v}_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \sqrt{\|\mathbf{v}_3\|} \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

On est pourvu de 6 équations pour résoudre les composantes de  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ , ce qui donne les mêmes équations que précédemment. Au final, cette introduction du spineur a moins d'intérêt que la première qui fournit la relation importante entre quadrivecteur et spineur. Par contre, elle permet de s'interroger sur le point de savoir quel est le spineur qui définirait la surface orientée en sens inverse définie par  $\mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{v}_1$  (l'isotrope  $\mathbf{v}_2 + i \mathbf{v}_1$ ). Il se trouve que c'est le spineur appelé «conjugué de charge» obtenu en conjuguant  $\eta$  et en le passant dans  $\sigma_y$  :

$$\boldsymbol{\eta}_{cc} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\eta}}$$