

# NAO

## Espace-Temps lorentzien discret sans angles imaginaires.

Bénédictus Servant \*  
Québec, Amérique du Nord

28 novembre 2016

### Résumé

Dans un précédent article nous avons cherché à reconstruire une géométrie (espace-temps) lorentzienne à partir des NAO. Cette approche admettait pour prémisse que les axes de rotation d'espace-temps (d'impulsion-énergie) sur un NAO donné étaient toujours perpendiculaires l'un à l'autre et que lorsqu'un NAO était tourné par rapport à un autre NAO, tous ses axes tournaient comme un seul bloc rigide. Ceci nous a amené à devoir introduire des angles imaginaires pour reproduire le temps. Or, cela conduit à des difficultés d'interprétation et de compréhension. Dans le présent article nous allons voir qu'il y a une voie plus simple avec les NAO où il n'est plus nécessaire d'introduire des angles imaginaires. Pour cela il suffit de ne considérer qu'une seule et unique paire d'axes de rotation, communes à tous les NAO; des invariants. On a ainsi un seul et même axe de temps propre (masse) et un seul et même axe d'impulsion, perpendiculaires l'un à l'autre. Ce qui change d'un observateur à l'autre c'est l'orientation de l'axe de temps (non propre) par rapport aux deux axes de rotation précités. La génération de l'espace euclidien discret 3D reste inchangée.

---

\*e-mail : bservant05@hotmail.com

# 1 Introduction

Commençons par rapeller certaines définitions sur les NAO données dans les articles précédents. Un NAO 6D est formé du produit tensoriel de deux NAO 3D. Un NAO 6D a en général six degrés de liberté (i.e. six angles). Dans notre cas seul cinq angles seront indépendants pour la description de l'espace-temps 3d+1 d'où NAO 5D.

Soit  $\mathbf{E}$ , un espace vectoriel 3D. C'est l'ensemble des vecteurs unitaires  $c'$  que l'on peut représenter dans la base de vecteurs orthonormés  $a, b$  et  $c$  (fig.1). Soit  $\mathbf{T}$ , un autre espace vectoriel 3D formé par l'ensemble des vecteurs unitaires  $\delta'$  que l'on peut représenter dans la base de vecteurs orthonormés  $\alpha, \Gamma$  et  $\delta$  (fig.1). De manière générale, un axe de rotation quelconque d'un NAO 6D appartient à l'espace vectoriel  $\mathbf{E} \otimes \mathbf{T}$  dont la base de représentation orthonormée est composée par l'ensemble des vecteurs unitaires  $(a, b, c \otimes \alpha, \Gamma, \delta)$ . Le groupe des rotations associé à  $\mathbf{E} \otimes \mathbf{T}$  est  $SO(4) \longleftrightarrow SU(2) \otimes SU(2)$ . Dans le cas particulier de l'espace-

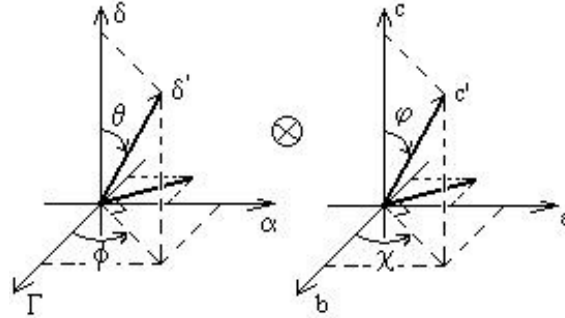


FIGURE 1 –

temps physique les six axes de la base orthonormée de  $\mathbf{E} \otimes \mathbf{T}$  se réduisent à cinq puisqu'on doit toujours avoir <sup>1</sup> :

$$\alpha \equiv c' . \tag{1}$$

$a, b$  et  $c$  sont les trois axes (orientations) d'espace et  $\delta$  est l'axe du temps propre.<sup>2</sup>

1. Nous identifions l'axe du module d'impulsion  $\alpha$  à l'axe d'espace  $c'$ . L'axe  $c'$  sera associé au vecteur d'impulsion  $\mathbf{p}$ . Un axe d'espace  $c''$  (différent de  $c'$  en général) sera éventuellement associé au vecteur de position  $\mathbf{r}$ .

2. Les expressions "axes d'espace" et "axe de temps" font référence à des axes de rotation sur

De plus, l'angle  $\phi$  (fig. 1) est fixe :

$$\phi = \pm\pi/2. \quad (2)$$

## 2 Rotations du Concierge.

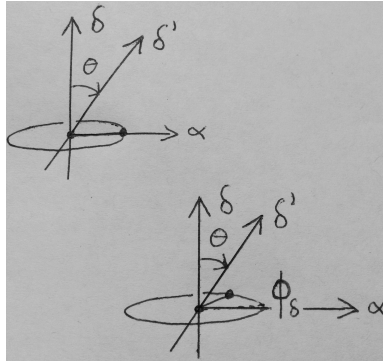


FIGURE 2 –

Soit deux NAO (fig. 2). L'un d'eux est pris comme référence. Nous sommes intéressé par une rotation autour de l'axe  $\delta$  (et non  $\delta'$  contrairement à ce qui a été fait dans un autre travail[1]<sup>3</sup>) d'un très petit angle  $\phi_\delta$ . Les axes des NAO sont parallèles et leur position relative est sans importance.  $\phi = +\pi/2$  pour les deux NAO. L'axe  $\Gamma$  (non montré) sort du papier.

Puisqu'il est vrai qu'une rotation  $R_{\delta'}(\phi_{\delta'})$  d'un angle  $\phi_{\delta'}$  autour d'un axe quelconque  $\delta'$  peut être remplacée par trois rotations successives autour des axes  $\delta$

---

un NAO quelconque et n'ont rien à voir avec les axes  $(x,t)$  d'un référentiel, inertiel ou non, de la physique classique et/ou contemporaine. Nous leur avons attribués ces noms sur la seule base que les angles de rotation qui leur sont associés se comportent comme des variables d'espace et de temps respectivement.

3. Dans cet article, la rotation se fait autour de l'axe  $\delta$  avec un angle fixe  $\phi_\delta$  et nous la représentons sur un système d'axes non-perpendiculaires  $\delta'$  et  $\alpha$  où  $\alpha$  est toujours perpendiculaire à  $\delta$  mais où  $\delta'$  peut varier. Cette façon de faire peut sembler étrange a priori. Mais elle repose sur les résultats d'un travail que nous avons effectué avec les spineurs de Dirac[2]. Il faut savoir qu'une particule élémentaire comme l'électron est bien décrite par la théorie du champ de Dirac qui renferme les spineurs du même nom. Il est possible de représenter ces spineurs en termes d'axes de rotation. Lorsque ceci est fait on constate que les axes de représentation sont comme  $\delta'$  et  $\alpha$ .

puis  $\alpha$  et enfin  $\Gamma$  avec des angles appropriés :

$$R_{\delta'}(\phi_{\delta'}) = R_{\alpha}(\phi_{\alpha})R_{\Gamma}(\phi_{\Gamma})R_{\delta}(\phi_{\delta}) \quad (3)$$

alors il est vrai que :

$$R_{\delta}(\phi_{\delta}) = R_{\Gamma}(-\phi_{\Gamma})R_{\alpha}(-\phi_{\alpha})R_{\delta'}(\phi_{\delta'}) \quad (4)$$

puisque l'inverse de toute rotation comme  $R_a(\phi_a)$  est  $R_a^{-1}(\phi_a) = R_a(-\phi_a)$ . Formellement les rotations sont définies par :

$$R_{\delta'}(\phi_{\delta'}) = \cos(\phi_{\delta'}/2)\sigma_o - i \sin(\phi_{\delta'}/2)(\sigma \cdot \delta') \quad (5)$$

avec les vecteurs(i.e. fig.1) :

$$\begin{aligned} \delta' = \sin(\theta) \cos(\phi = \pi/2)\Gamma + \sin(\theta) \sin(\phi = \pi/2)\alpha \\ + \cos(\theta)\delta \end{aligned} \quad (6)$$

et

$$\sigma = \sigma_{\Gamma}\Gamma + \sigma_{\alpha}\alpha + \sigma_{\delta}\delta \quad (7)$$

où :

$$\sigma_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

sont les matrices de Pauli (du sous-espace T, fig.1) et  $\sigma_o$ , la matrice unité :

$$\sigma_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Les opérations de rotation autour des axes  $\alpha$ ,  $\Gamma$  et  $\delta$  sont donnés par :

$$R_{\alpha}(\phi_{\alpha}) = \cos(\phi_{\alpha}/2)\sigma_o - i \sin(\phi_{\alpha}/2)\sigma_{\alpha}, \quad (10)$$

$$R_{\Gamma}(\phi_{\Gamma}) = \cos(\phi_{\Gamma}/2)\sigma_o - i \sin(\phi_{\Gamma}/2)\sigma_{\Gamma} \quad (11)$$

et

$$R_{\delta}(\phi_{\delta}) = \cos(\phi_{\delta}/2)\sigma_o - i \sin(\phi_{\delta}/2)\sigma_{\delta}. \quad (12)$$

On peut alors montrer formellement que pour satisfaire (4) lorsque  $\phi_\delta$  tend vers zéro, les angles  $\phi_{\delta'}$ ,  $\phi_\alpha$  et  $\phi_\Gamma$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}\lim_{\phi_\delta \rightarrow 0} \phi_\Gamma &= 0 \\ \lim_{\phi_\delta \rightarrow 0} \phi_\alpha &= \phi_\delta \tan(\theta) \\ \lim_{\phi_\delta \rightarrow 0} \phi_{\delta'} &= \frac{\phi_\delta}{\cos(\theta)} .\end{aligned}\quad (13)$$

Ces résultats sont vrais quelque soit l'ordre des opérations du membre de droit de l'équation (4). Pour  $\phi_\delta$  très petit mais non nul on a avec une très bonne approximation :

$$\phi_{\delta'} \simeq \frac{\phi_\delta}{\cos(\theta)} = \frac{\phi_\delta}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} , \quad (14)$$

$$\phi_\alpha \simeq \phi_\delta \tan(\theta) = \frac{\phi_\delta \sin(\theta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} \quad (15)$$

et

$$\phi_\Gamma \simeq 0 \quad (16)$$

si  $0 < \theta < \pi/2$ . Par suite :

$$\phi_{\delta'}^2 - \phi_\alpha^2 \simeq \phi_\delta^2 . \quad (17)$$

Soulignons que, comme l'indique l'éq.(4), les angles autour des axes  $\alpha$  et  $\delta'$  ont des signes opposés (i.e.  $-\phi_\alpha$  et  $\phi_{\delta'}$ ). Enfin, notons qu'une situation particulière se présente lorsque  $\theta = \pi/2$  et  $\phi_\delta = 0$ . Dans ce cas  $\phi_\alpha = \phi_{\delta'}$  et il n'y a aucune limitation sur la valeur de ces angles. Rappelons que  $c'$  est un axe d'espace[3] dont l'angle  $\phi_{c'} = \phi_\alpha$  se décompose sur trois axes perpendiculaires d'espace a, b et c (fig. 1) :

$$\phi_a^2 + \phi_b^2 + \phi_c^2 \simeq \phi_{c'}^2 . \quad (18)$$

### 3 Comportement à grande échelle.

Jusqu'à maintenant les résultats obtenus ne concernent que deux NAO avec un très petit angle  $\phi_\delta$  les séparant le long d'un axe de rotation commun  $\delta$  (i.e. axe de "temps propre"). Pour passer au comportement à grande échelle nous allons considérer des suites ou chaînes de NAO en procédant comme dans [3].

Soit un NAO de référence NR et une suite de N (i.e. N est un entier  $N > 1$ ) NAO tous de même axe de rotation  $\delta$  que NR. Soit  $j \leq N$  un entier qui indice chaque NAO le long de la suite. On notera  $N_j$  le NAO d'indice  $j$  de la suite. NR porte l'indice  $j=0$ . Tournons chaque  $N_j$  autour de l'axe  $\delta$  conformément à l'opération de rotation  $R_\delta(j\phi_\delta)$  où  $\phi_\delta$  est un angle constant (i.e. indépendant de  $j$ ) et très petit :

$$R_\delta(j\phi_\delta) = \prod_{n=1}^j R_\delta(\phi_\delta) \quad (19)$$

ou conformément à (4) :

$$R_\delta(j\phi_\delta) = \prod_{n=1}^j R_\alpha(-\phi_\alpha) R_\Gamma(-\phi_\Gamma) R_{\delta'}(\phi_{\delta'}) , \quad (20)$$

où à chaque étape (i.e. chaque  $j$ ), les axes  $\alpha$ ,  $\Gamma$  et  $\delta'$  sont toujours les mêmes. Il est supposé que les valeurs de ces petits angles satisfont aux éqs.(14)-(17). Par rapport à NR un NAO quelconque  $N_j$  a pour angles :

$$\Psi_\delta \equiv j\phi_\delta . \quad (21)$$

Par rapport aux axes  $\delta'$  et  $\alpha$  cette même rotation a pour angles :

$$\Psi_{\delta'} \equiv j\phi_{\delta'} \quad (22)$$

et

$$\Psi_\alpha \equiv j\phi_\alpha . \quad (23)$$

### 3.1 Projections suivant les axes $\alpha$ et $\delta'$ .

Sur le même NR nous pouvons nous intéresser à un autre axe de rotation que  $\delta$  comme par exemple  $\delta'$  et rechercher une autre suite (ou chaîne) de NAO d'axe de rotation parallèle à  $\delta'$ , séparés les uns des autres par un angle constant  $\phi_\delta$ . Nous utilisons le même angle  $\phi_\delta$  que pour l'axe  $\delta$  afin de conserver la même unité angulaire. Soit  $j_{\delta'}$  l'entier qui indice chaque NAO (noté  $N_{j_{\delta'}}$ ) de la suite selon l'axe  $\delta'$  avec  $j_{\delta'} = 0$  pour NR. Il s'en suit que selon l'axe  $\delta'$ ,  $N_{j_{\delta'}}$  fait un angle  $\eta_{\delta'}$  par rapport à NR :

$$\eta_{\delta'} = j_{\delta'} \phi_\delta . \quad (24)$$

Nous imposons :

$$\eta_{\delta'} \simeq \psi_{\delta'} , \quad (25)$$

la stricte égalité n'est pas possible puisque  $j_{\delta'}$  doit être un entier. De (22), (24), (25) et (14) on tire :

$$j_{\delta'} \simeq \frac{j}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} \quad (26)$$

où  $j$  est l'entier selon l'axe de rotation  $\delta$ . Ce que nous venons de faire pour l'axe  $\delta'$  nous pouvons le refaire pour l'axe  $\alpha$ . Dans ce cas, en lieu et place de (24), (25) et (26) on a :

$$\eta_\alpha = j_\alpha \phi_\delta \quad (27)$$

$$\eta_\alpha \simeq \psi_\alpha , \quad (28)$$

et

$$j_\alpha \simeq \frac{j \sin(\theta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} . \quad (29)$$

Par ailleurs, nous exigeons que :

$$R_\delta(\psi_\delta) = R_\alpha(-\eta_\alpha) R_\Gamma(0) R_{\delta'}(\eta_{\delta'}) \quad (30)$$

c'est à dire que la rotation autour de  $\delta$  avec un grand angle  $\psi_\delta$  doit mener au même résultat que si on tourne autour de  $\alpha$  puis  $\delta'$  avec de grands angles  $-\eta_\alpha$

et  $\eta_{\delta'}$  respectivement. On peut démontrer à partir de (30) et de la définition des opérations de rotation que ceci n'est possible que si tous ces grands angles sont des multiples entiers de  $2\pi$  :

$$\psi_{\delta} = 2\pi m_{\delta} \quad (31)$$

$$\eta_{\alpha} = 2\pi m_{\alpha} , \quad (32)$$

$$\eta_{\delta'} = 2\pi m_{\delta'} \quad (33)$$

avec  $m_k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  où  $k \equiv \delta, \alpha, \delta'$  et ce quelque soit l'ordre des opérations de rotation du membre de droite de (30). De (21) et (31) on doit donc avoir :

$$j = \frac{2\pi}{\phi_{\delta}} m_{\delta} , \quad (34)$$

de (27) et (32) puis (34) il faut que :

$$j_{\alpha} = \frac{2\pi}{\phi_{\delta}} m_{\alpha} = j \frac{m_{\alpha}}{m_{\delta}} , \quad (35)$$

et enfin, (24), (33) et (34) imposent que :

$$j_{\delta'} = \frac{2\pi}{\phi_{\delta}} m_{\delta'} = j \frac{m_{\delta'}}{m_{\delta}} . \quad (36)$$

Si on compare (29) à (35) puis (26) à (36) alors :

$$\frac{m_{\alpha}}{m_{\delta}} \simeq \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} \quad (37)$$

et

$$\frac{m_{\delta'}}{m_{\delta}} \simeq \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} \quad (38)$$

respectivement. Ces approximations sont possibles et d'autant meilleures, pour toute valeur de l'angle  $\theta$ , que si les entiers  $m_{\delta'}$ ,  $m_{\delta}$  et  $m_{\alpha}$  sont très grands. Dans ce



cas, et dans ce cas seulement, nous aurons pour les “projections” de  $j$  sur les axes  $\delta'$  et  $\alpha$  un comportement de quadrivecteurs à grande échelle<sup>4</sup> :

$$j_{\delta'}^2 - j_{\alpha}^2 \simeq j^2 . \quad (39)$$

Des éqs. (14), (15), (26) et (29) il est facile de montrer que :

$$j_{\delta'}\phi_{\delta'} - j_{\alpha}\phi_{\alpha} \simeq j\phi_{\delta} . \quad (40)$$

Rappelons que les résultats précédents concernent trois chaînes de NAO ; selon l'axe  $\delta$ , l'axe  $\alpha$  et l'axe  $\delta'$ . Notons que  $\alpha \equiv c'$  (i.e. axe d'espace) de sorte que  $j_{\alpha} = j_{c'}$  et selon éq. (38) de [3] :

$$j_a^2 + j_b^2 + j_c^2 \simeq j_{c'}^2 . \quad (41)$$

(Soulignons que dans [3] on utilisait le symbole  $j$  pour représenter  $j_{c'}$ . Dans le présent article, le symbole  $j$  représente  $j_{\delta}$ ).

## 4 L'Hypothèse du Concierge

Considérons les quadrivecteurs espace-temps  $(t, x)$  et énergie-impulsion  $(E, p)$  de la relativité restreinte. Ils satisfont aux relations suivantes :

$$E^2 - (cp)^2 = (mc^2)^2 , \quad (42)$$

$$t^2 - (x/c)^2 = \tau^2 , \quad (43)$$

et

$$Et - cp(x/c) = mc^2\tau \quad (44)$$

où  $\tau$  est la coordonnée de temps propre (dans un référentiel où la masse  $m$  est au repos),  $x$  et  $t$  sont les coordonnées d'espace-temps dans un référentiel en mouvement. Si nous admettons l'hypothèse que les NAO forment le substrat de l'espace-temps et des particules élémentaires, alors il n'est pas difficile de faire le rapprochement suivant en comparant les éqs. (17) et (39)-(40) à (42)-(44) respectivement :

---

4. Cela veut dire que les équations (39)-(41) sont valables que pour une paire (quelconque) de NAO qui sont séparés par de nombreux NAO entre eux deux, le long de la chaîne. En d'autres mots, l'écart  $\Delta j$ ,  $\Delta j_{\alpha}$  et  $\Delta j_{\delta'}$  entre ces deux NAO doit être très grand.

$$\begin{aligned}
\phi_\delta &\rightarrow mc^2 \quad \text{et} \quad j \rightarrow \tau \\
\phi_{\delta'} &\rightarrow E \quad \text{et} \quad j_{\delta'} \rightarrow t \\
\phi_\alpha &\rightarrow cp \quad \text{et} \quad j_\alpha \rightarrow x/c .
\end{aligned} \tag{45}$$

#### 4.1 Énergie-Impulsion et Espace-Temps. Définitions.

Supposons que lorsque l'indice  $j$  le long d'une chaîne ou suite de NAO d'axe  $\delta$  vaut  $j = J$  on obtient un NAO tel que son angle de rotation autour de  $\delta$  est  $\phi_\delta J = 2\pi$ . Il s'ensuit que  $J$  est le nombre de NAO (à partir du NAO de référence NR) qu'il faut compter pour obtenir un tour complet autour de  $\delta$ . C'est donc la période par définition même. Par conséquent nous pouvons dire que la séparation ou incrément angulaire autour de l'axe  $\delta$  entre deux quelconques NAO plus proches voisins dans la suite est  $\phi_\delta = 2\pi/J$ . Si  $J = 1$  nous obtenons l'incrément angulaire maximal :  $\phi_\delta \equiv \phi_{\delta\max} = 2\pi$ . D'un autre côté si  $J = N$ , où  $N$  est un entier qui est le nombre total de NAO dans la suite, alors nous obtenons l'incrément angulaire minimal :  $\phi_\delta \equiv \phi_{\delta\min} = 2\pi/N$ .

Introduisons une unique unité de temps à savoir  $t_0$ . En accord avec (45) nous posons :

$$\begin{aligned}
\tau &\equiv jt_0 \\
t &\equiv j_{\delta'}t_0 \\
x/c &\equiv j_\alpha t_0 .
\end{aligned} \tag{46}$$

Considérons à nouveau la suite selon  $\delta$ . Parce que  $J$  est la période il est clair que  $Jt_0 \equiv T$  est la période correspondante en unité de temps. En conséquence si  $J = 1$ , ce qui est la plus petite valeur pour  $J$ , alors on obtient  $T = t_0$  et  $t_0$  est simplement la plus petite valeur de la période en unité de temps. En d'autres termes  $t_0$  correspond à un écart angulaire de  $2\pi$  entre deux NAO plus proches voisins. On définit l'unité de longueur  $d_0$  par  $d_0 \equiv ct_0$ .

D'autre part, en accord avec (45) posons :

$$\begin{aligned}
\phi_\delta/2\pi &\equiv \frac{mc^2}{E_0} \\
\phi_{\delta'}/2\pi &\equiv \frac{E}{E_0} \\
\phi_\alpha/2\pi &\equiv \frac{cp}{E_0} .
\end{aligned} \tag{47}$$

Parce que ces angles doivent être très petits (i.e. selon [1]) devant  $2\pi$ , la valeur de l'énergie  $E_0$  doit être très grande devant toutes valeurs de  $mc^2$ ,  $E$  et  $cp$ . La quantité  $E_0$  correspond, en terme d'énergie, à un écart angulaire de  $2\pi$  entre deux NAO plus proches voisins.

Il faut noter que conformément à la relativité restreinte, l'énergie et l'impulsion ou quantité de mouvement sont données par :

$$E = mc^2 \frac{dt}{d\tau} \quad p = m \frac{dx}{d\tau} \quad (48)$$

où  $m$  et  $d\tau$  sont des invariants de Lorentz. Par suite, de (48) nous voyons que :

$$\Delta t = \Delta\tau \left[ \frac{E}{mc^2} \right] \quad \Delta(x/c) = \Delta\tau \left[ \frac{cp}{mc^2} \right] \quad (49)$$

ce qui signifie que les intervals de temps et d'espace sont directement proportionnels à l'intervalle de temps propre  $\Delta\tau$ . Conformément à (47), les constantes de proportionnalité dans (49) sont respectivement égales à  $\frac{\phi_{\delta'}}{\phi_{\delta}}$  et  $\frac{\phi_{\alpha}}{\phi_{\delta}}$  et de (46) l'équation (49) devient :

$$\Delta j_{\delta'} = \Delta j \left[ \frac{\phi_{\delta'}}{\phi_{\delta}} \right] \quad \Delta j_{\alpha} = \Delta j \left[ \frac{\phi_{\alpha}}{\phi_{\delta}} \right]. \quad (50)$$

Or, ces derniers résultats sont parfaitement compatibles avec les résultats (14), (15), (26) et (29).

Finalement à partir de la première égalité de (47), nous pouvons écrire :

$$mc^2 = \frac{J\phi_{\delta}}{Jt_0} \frac{E_0 t_0}{2\pi} = \frac{2\pi E_0 t_0}{T} = \frac{E_0 t_0}{2\pi} \omega \quad (51)$$

où  $J$  est la période (voir plus haut dans cette section).  $\omega \equiv 2\pi/T$  est simplement la fréquence. Dans le membre gauche de (51) nous avons de l'énergie (au repos). À droite nous avons le produit de deux constantes que multiplie une fréquence. Ceci rappelle la relation Planck-Einstein. Il est donc naturel de poser :

$$\frac{E_0 t_0}{2\pi} = \hbar, \quad (52)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck divisée par  $2\pi$ . Note. De (52), de la définition de  $d_0$  (i.e.  $d_0 \equiv ct_0$ ) et du fait que l'on a  $E_0 \gg mc^2$ , on doit avoir  $d_0 \ll \lambda_c$  où  $\lambda_c = h/mc$  est la longueur d'onde de Compton d'une particule de masse  $m$ . Cette dernière inégalité donne une limite supérieure à  $d_0$  ou  $t_0$ .

## 5 Transformations de Lorentz et Rotations.

Les transformations de Lorentz de l'énergie-impulsion pour deux systèmes de référence inertiels S et S' où S' se déplace à la vitesse  $v$  par rapport à S sont :

$$E = \gamma(E' + \frac{v}{c}cp') \quad (53)$$

$$cp = \gamma(cp' + \frac{v}{c}E') \quad (54)$$

avec :

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (55)$$

Compte tenu de (47), les petits angles devraient alors se transformer de la même façon :

$$\phi_{S'} = \gamma(\phi'_{S'} + \frac{v}{c}\phi'_{\alpha}) \quad (56)$$

$$\phi_{\alpha} = \gamma(\phi'_{\alpha} + \frac{v}{c}\phi'_{S'}). \quad (57)$$

La question qui se pose est de savoir comment le paramètre  $v/c$  (i.e. la vitesse relative entre les deux systèmes de référence) peut s'exprimer en termes d'angles et à quoi correspond S et S' dans le cadre des NAO. Des équations (15) et (47) on a :

$$\sin \theta = \frac{cp}{E}. \quad (58)$$

De (48) on note que  $\sin \theta = cp/E$  est égale à  $dx/cdt$ , soit la vitesse de la particule de masse  $m$  divisé par  $c$ . En introduisant (53)-(54) dans (58) on obtient la transformation de Lorentz pour l'angle  $\theta$  (i.e. de  $\theta'$  à  $\theta$ ) :

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta' + (v/c)}{[1 + (v/c) \sin \theta']}. \quad (59)$$

L'équation (59) nous donne la transformation de la vitesse de la particule en passant de S' à S. Notons que si  $\theta' = 0$  alors  $\sin(\theta) = v/c$ ; la vitesse de la particule

est nulle pour S' et vaut v/c pour S. De cette équation on peut exprimer v/c en terme d'angles. On a :

$$v/c = \frac{\sin\theta - \sin\theta'}{1 - \sin\theta\sin\theta'} \quad (60)$$

Les axes ( $\delta$ ,  $\alpha$ ) sont des invariants relativistes, ils sont les mêmes pour tous les observateurs ou tous systèmes S et S'. L'invariant  $\phi_\delta$  (i.e. masse ou  $mc^2$  de la particule au repos) est l'angle fixe autour de l'axe de temps propre  $\delta$  (i.e. voir éq. (4)). Si l'axe de temps (aussi axe d'énergie E)  $\delta'$  (noté  $\delta'_1$  sur fig.3) fait un angle  $\theta$  par rapport à  $\delta$  il constitue avec l'axe  $\alpha$  l'équivalent de S, c'est-à-dire le système d'axes de rotation où l'on "mesure" les petits angles  $\phi_{\delta'}$  et  $\phi_\alpha$ . Si un autre axe de temps  $\delta'$  (noté  $\delta'_2$  sur fig.3) fait un angle  $\theta'$  par rapport à  $\delta$ , il constitue avec l'axe  $\alpha$  l'équivalent de S' c'est-à-dire le système d'axes de rotation où l'on "mesure" les petits angles  $\phi'_{\delta'}$  et  $\phi'_\alpha$ . Mais dans les deux cas ces petits angles satisfont à (4), (13)-(15) (avec  $\theta$  ou  $\theta'$  selon le cas) et la différence de leur carré est un invariant :

$$\phi_{\delta'}^2 - \phi_\alpha^2 = \phi'^2_{\delta'} - \phi'^2_\alpha \quad (61)$$

et égale à  $\phi_\delta^2$  conformément à (17). Quant au paramètre v/c il est (dans le cadre du modèle des NAO) déterminé par (60) et les angles  $\theta$  et  $\theta'$  caractérisent respectivement la vitesse de la "particule" par rapport à S (i.e. axes de rotation ( $\delta'_1$ ,  $\alpha$ ); fig.3) et la vitesse de la même "particule" par rapport à S' (i.e. axes de rotation ( $\delta'_2$ ,  $\alpha$ ); fig.3). Notons enfin que les transformations de Lorentz inverses :

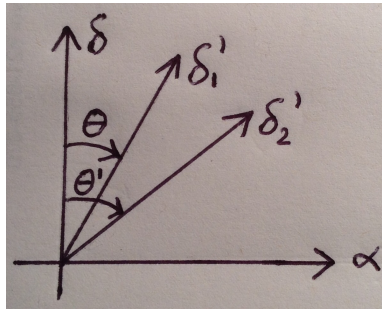


FIGURE 3 –

$$E' = \gamma(E - \frac{v}{c}cp) \quad (62)$$

$$cp' = \gamma(cp - \frac{v}{c}E) \quad (63)$$

nous conduisent à :

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta - (v/c)}{[1 - (v/c) \sin \theta]} \quad (64)$$

en lieu et place de (59).

Ce que nous venons de faire dans cette section avec l'énergie-impulsion et les petits angles  $\phi_\delta$  et  $\phi_\alpha$  nous pouvons le refaire avec l'espace-temps et les grands entiers de site  $j_\delta$  et  $j_\alpha$  (i.e. à grande échelle) parce que les transformations de Lorentz pour l'espace-temps sont similaires à celles de l'énergie-impulsion et parce que les relations entre les entiers  $j$  (i.e. (34)-(39)) et les relations de ces derniers avec l'angle  $\theta$  sont similaires à celles des petits angles.

## 6 Conclusion

Dans ce travail nous avons montré qu'il est possible de définir les NAO de manière telle que, contrairement au travail [1], l'axe du temps n'a plus besoin d'angles imaginaires. Ceci facilite grandement la compréhension et l'interprétation.

## Références

- [1] Servant, B., " Génération d'un Espace-Temps lorentzien discret à partir des NAO", 17 fév. 2016. [bservant05.blogspot.com](http://bservant05.blogspot.com)
- [2] Servant, B. "Spineurs de Dirac vs Ibozoo uu", À paraître. [bservant05.blogspot.com](http://bservant05.blogspot.com)
- [3] Servant, B., "Génération d'un Espace Euclidien Discret Tridimensionnel à partir des NAO", 10 déc. 2014. [bservant05.blogspot.com](http://bservant05.blogspot.com)