

# II

## Génération d'un Espace-Temps lorentzien discret à partir des NAO

par  
Bénédictus Servant \*  
Québec, Amérique du Nord

17 février 2016

### 1 Introduction

Dans un précédent article[1] nous avons montré comment on peut générer un espace euclidien discret 3d à partir des NAO 3D. Nous allons voir dans ce second article comment le temps doit s'inscrire dans le NAO pour être en mesure de générer un espace-temps lorentzien discret 3d+1. Par convention nous utiliserons la rotation dextrogyre. Pour des raisons dydactiques la représentation géométrique (i.e. axes) est utilisée. Nous emploierons la même nomenclature que celle du premier article[1] notamment pour les axes d'espace (i.e. a,b,c et c').

### 2 Espace-Temps lorentzien

#### 2.1 NAO 5D.

Un NAO 6D est formé du produit tensoriel de deux NAO 3D. Un NAO 6D a en général six degrés de liberté (i.e. six angles car six axes linéairement indépendants). Toutefois, dans notre cas seul cinq angles seront indépendants pour la description de l'espace-temps 3d+1 d'où NAO 5D<sup>1</sup>.

\*email : bservant05@hotmail.com

1. Remarque. Imaginons une surface courbe à deux dimensions comme la surface d'un drap ou tissus avec des plis, des courbes etc. Pour des êtres, telles des fourmis, confinés sur cette surface, il est impensable de se sortir de cet espace 2d sauf s'ils ont accès à une troisième dimension. L'espace-temps de la physique, notre espace-temps, a quatre dimensions (3d+1). Dans la théorie d'Einstein, cet espace-temps est un

Soit  $\mathbf{E}$ , un espace vectoriel 3D. C'est l'ensemble des vecteurs unitaires  $c'$  que l'on peut représenter dans la base de vecteurs orthonormés  $a, b$  et  $c$  (fig.1). Soit  $\mathbf{T}$ , un autre espace vectoriel 3D formé par l'ensemble des vecteurs unitaires  $\delta'$  que l'on peut représenter dans la base de vecteurs orthonormés  $\alpha, \Gamma$  et  $\delta$  (fig.1). De manière générale, un axe de rotation quelconque d'un NAO 6D appartient à l'espace vectoriel  $\mathbf{E} \otimes \mathbf{T}$  dont la base de représentation orthonormée est composée par l'ensemble des vecteurs unitaires  $(a,b,c \otimes \alpha,\Gamma,\delta)$ . Le groupe des rotations associé à  $\mathbf{E} \otimes \mathbf{T}$  est  $SO(4) \longleftrightarrow SU(2) \otimes SU(2)$ . Dans le cas particulier de l'espace-temps physique les six axes de la base orthonormée de  $\mathbf{E} \otimes \mathbf{T}$  se réduisent à cinq puisqu'on doit toujours avoir :

$$\alpha \equiv c', \quad (1)$$

quelque soit  $c'$ .  $a,b$  et  $c$  sont les trois axes (orientations) d'espace et  $\delta$  est l'axe du temps.<sup>2</sup> De plus, l'angle  $\phi$  (fig.

“tissus” dynamique qui peut se déformer, se courber. Parce qu'il n'a que quatre dimensions (i.e. parce que nous vivons dans cet espace et n'avons accès qu'à ces quatre dimensions), on ne peut pas en sortir. Mais les NAO 5D ont cinq dimensions. Si ces derniers sont effectivement à l'origine de notre espace-temps, alors il est possible d'imaginer pouvoir utiliser cette cinquième dimension pour s'en échapper.

2. Les expressions “axes d'espace” et “axe de temps” font référence à des axes de rotation sur un NAO quelconque et n'ont rien à voir avec les axes  $(x,t)$  d'un référentiel, inertiel ou non, de la physique classique et/ou contemporaine. Nous leur avons attribués ces noms sur la seule base que les angles de rotation qui leur sont associés se comportent comme des variables d'espace et de temps respectivement.

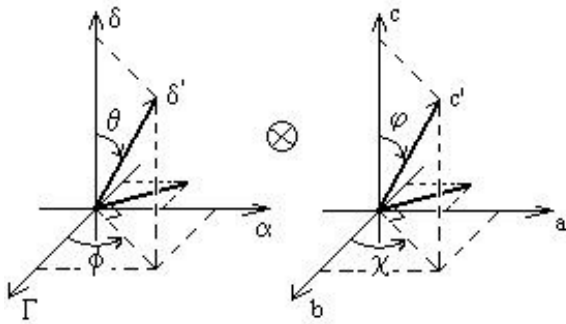


FIGURE 1 –

1) est fixe :

$$\phi = \pi/2. \quad (2)$$

Dans ce dernier cas l'axe  $\Gamma$  caractérise le mouvement relatif dans la direction  $\alpha$  (voir annexe B)<sup>3</sup>.

## 2.2 Angles Imaginaires

Avant d'aller plus loin il est nécessaire d'introduire la notion d'angles de rotation imaginaires puisque l'axe du temps ne peut être de même nature que les axes d'espace si l'on souhaite retrouver, éventuellement, l'espace-temps de la relativité restreinte.

Considérons le système d'axes unitaires  $(\delta, \alpha, \Gamma)$  où  $\Gamma$  (non montré) sort du papier (Fig2). Soit  $(\delta', \alpha', \Gamma' = \Gamma)$  un autre système d'axes ou vecteurs unitaires contenus exclusivement dans le plan formé par les axes  $\delta, \alpha$  et tourné par rapport au premier système avec un angle  $i\eta$  (Fig. 2). L'angle réel  $\eta$  a été multiplié par le nombre "i" ( $=\sqrt{-1}$ ); comme si on avait posé  $\theta \equiv i\eta$  sur la fig.1. Il suffit d'imaginer pour l'instant que i est une simple constante multiplicative de module 1<sup>4</sup>. En traitant "i" comme une simple constante, il est facile alors de vérifier que les axes

3. Avec la contrainte (2) nous nous limitons à un espace plat (i.e. lorentzien) à quatre dimensions. Pour obtenir une description d'un espace courbe à quatre dimensions (dans le cadre du modèle des NAO 5D) on doit lever cette contrainte.

4. Bien que les angles de rotation autour des axes d'espace tel  $c'$  ( $\alpha$  et  $\alpha'$ ) sont réels, l'angle de rotation autour de l'axe de temps  $\delta$  (et  $\delta'$ ) est imaginaire. C'est cela qui impose l'introduction de i en facteur de  $\eta$ . Les angles de rotation autour de  $\Gamma$  sont donc imaginaires.

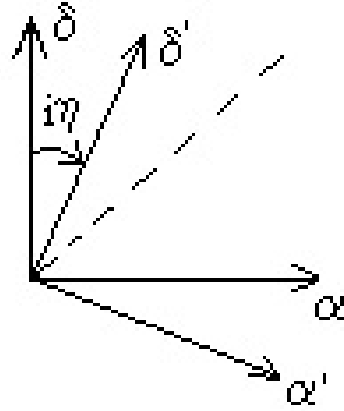


FIGURE 2 –

(vecteurs unitaires) de la figure 2 se transforment formellement comme suit :

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\eta) & -\sin(i\eta) \\ \sin(i\eta) & \cos(i\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix}, \quad (3)$$

qui n'est rien d'autre qu'une rotation dans le plan.

Imaginons que la projection du vecteur unitaire  $\delta'$  sur le vecteur unitaire  $\delta$  (fig.2) est égale à  $iu$  où  $u$  est un nombre réel et sa projection sur le vecteur unitaire  $\alpha$  vaut  $q$  (aussi un nombre réel) avec  $|u| \leq 1$  et  $|q| \leq 1$ . Nous pouvons donc écrire par définition formelle du cosinus et sinus :

$$\begin{aligned} \cos(i\eta) &\equiv \frac{iu}{\sqrt{(iu)^2 + (q)^2}} = \frac{\text{sign}(u)}{\sqrt{1 + (q/iu)^2}} \\ \sin(i\eta) &\equiv \frac{q}{\sqrt{(iu)^2 + (q)^2}} = \frac{q/i|u|}{\sqrt{1 + (q/iu)^2}} \end{aligned} \quad (4)$$

où  $\text{sign}(\dots)$  signifie "1 multiplié par signe de ...". De plus, des résultats précédent on a :

$$\tan(i\eta) \equiv \frac{\sin(i\eta)}{\cos(i\eta)} = (q/iu) = -i \tan(\eta) \quad (5)$$

de sorte que les équations en (4) peuvent s'exprimer en fonction de  $\eta$  seulement :

$$\begin{aligned} \cos(i\eta) &= \frac{\text{sign}(\cos(\eta))}{\sqrt{1 + (i \tan(\eta))^2}} \\ \sin(i\eta) &= \frac{-i |\tan(\eta)| \text{sign}(\sin(\eta))}{\sqrt{1 + (i \tan(\eta))^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

On peut vérifier que l'on obtient les mêmes résultats (i.e. eq.(6)) si on projette  $\alpha'$  au lieu de  $\delta'$  sur les axes  $(\delta, \alpha)$ . Notons enfin que de (6) on a :

$$\cos^2(i\eta) + \sin^2(i\eta) = 1. \quad (7)$$

Le caractère divergent de ces fonctions pour des multiples impaires de  $\pi/4$  provient du fait qu'au dénominateur de (6) on a des nombres qui sont issus d'axes de nature différente soit un axe à angle réel et l'autre à angle imaginaire. Si les deux axes étaient à angles réels ou tous deux à angles imaginaires il n'y aurait pas de divergence. Cette divergence se manifeste lorsqu'on décide de ne plus considérer  $i$  comme une constante de module 1 mais de lui donner sa valeur (i.e.  $\sqrt{-1}$ ). (Nous verrons plus tard, annexe B, que cette divergence à  $\pi/4$  est celle qui se manifeste dans les transformations de Lorentz lorsque la vitesse relative  $v$  de deux systèmes de référence est égale à la vitesse de la lumière  $c$ .) Il est important de noter que dans (6) les membres de droite ne sont pas des fonctions hyperboliques mais circulaires et que  $\eta$  n'est pas le paramètre de "boost" de la relativité restreinte. Soulignons enfin que si pour  $0 \leq \eta \leq \pi/4$  nous obtenons les résultats en (6), à savoir un sinus qui est imaginaire et un cosinus qui est réel, cela s'inverse lorsque  $\pi/4 \leq \eta \leq \pi/2$  et ainsi de suite.

### 3 Rotations Infinitésimales

Comme nous l'avons fait dans l'article premier [1] pour les axes d'espace, nous montrons ici (avec l'axe du temps) que les petits angles de rotation entre deux NAO possèdent une propriété remarquable qui est celle de se comporter comme un vecteur et d'être invariant par rapport aux rotations du trièdre de référence. Pour ne pas alourdir la notation inutilement lors des manipulations mathématiques, le facteur multiplicatif "i" pour les angles ne sera pas écrit explicitement. Il sera sous-entendu que  $\theta \rightarrow i\eta$ ,  $\phi_{\delta'} \rightarrow i\Phi_{\delta'}$  où  $\eta$  et  $\Phi_{\delta'}$  sont des réels. À la fin du traitement, le "i" sera explicitement affiché.<sup>5</sup>

Considérons le système d'axes unitaires  $\delta, \alpha, \Gamma$  où  $\Gamma$  (non montré) sort du papier (Fig3). Soit  $\delta'$  un axe ou

5. Ceci signifie que l'on peut traiter mathématiquement l'axe du temps comme n'importe quel axe de rotation possédant des angles de rotations réels (comme les axes de rotation spatiale[1]) sans se soucier du facteur "i" et l'introduire à la fin du traitement seulement.

vecteur unitaire quelconque contenu exclusivement dans le plan formé par les axes  $\delta, \alpha$ .

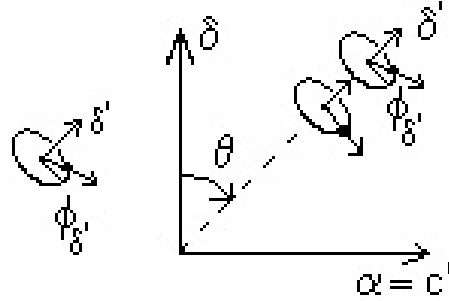


FIGURE 3 –

Sur la figure 3 nous avons disposé deux NAO en ligne le long de l'axe  $\delta'$ . Mais cet alignement est purement arbitraire (i.e. le second NAO peut être n'importe "où" comme à gauche sur la figure) et la "distance" entre eux est aussi sans importance. Ce qui a du sens au plan physique c'est l'angle  $\phi_{\delta'}$  entre eux ainsi que leur axe de rotation respectif qui est  $\delta'$ . Notons enfin que le système d'axes  $\delta$  et  $\alpha$  n'a pas de réalité physique. De fait ces axes devront être assimilés à ceux d'un autre NAO considéré comme référence.

#### 3.1 Comportement Vectoriel

Considérons deux NAO d'axe de rotation  $\delta'$  Fig3. On suppose que l'angle  $\phi_{\delta'}$  autour de l'axe  $\delta'$  est très petit. Formellement la rotation est définie par :

$$R_{\delta'}(\phi_{\delta'}) = \cos(\phi_{\delta'}/2)\sigma_o - i \sin(\phi_{\delta'}/2)(\sigma \cdot \delta') \quad (8)$$

avec les vecteurs (i.e. fig.1) :

$$\delta' = \sin(\theta) \cos(\phi = \pi/2)\Gamma + \sin(\theta) \sin(\phi = \pi/2)\alpha + \cos(\theta)\delta \quad (9)$$

et

$$\sigma = \sigma_{\Gamma}\Gamma + \sigma_{\alpha}\alpha + \sigma_{\delta}\delta \quad (10)$$

où ici :

$$\sigma_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

sont les matrices de Pauli (du sous-espace T, fig.1) et  $\sigma_o$ , la matrice unité :

$$\sigma_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Il est possible de reproduire la rotation  $R_{\delta'}(\phi_{\delta'})$  en tournant, successivement, par rapport aux axes  $\delta$ ,  $\alpha$  et  $\Gamma$  avec des angles  $\phi_\delta$ ,  $\phi_\alpha$  et  $\phi_\Gamma$  respectivement :

$$R_{\delta'}(\phi_{\delta'}) = R_\Gamma(\phi_\Gamma)R_\alpha(\phi_\alpha)R_\delta(\phi_\delta). \quad (13)$$

Les opérations de rotation autour des axes  $\alpha$ ,  $\Gamma$  et  $\delta$  sont donnés par :

$$R_\alpha(\phi_\alpha) = \cos(\phi_\alpha/2)\sigma_o - i \sin(\phi_\alpha/2)\sigma_\alpha, \quad (14)$$

$$R_\Gamma(\phi_\Gamma) = \cos(\phi_\Gamma/2)\sigma_o - i \sin(\phi_\Gamma/2)\sigma_\Gamma \quad (15)$$

et

$$R_\delta(\phi_\delta) = \cos(\phi_\delta/2)\sigma_o - i \sin(\phi_\delta/2)\sigma_\delta. \quad (16)$$

On peut alors montrer formellement que pour satisfaire (13) lorsque  $\phi_{\delta'}$  tend vers zéro, les angles  $\phi_\delta$ ,  $\phi_\alpha$  et  $\phi_\Gamma$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \lim_{\phi_{\delta'} \rightarrow 0} \phi_\Gamma &= \phi_{\delta'} \sin(\theta) \cos(\phi = \pi/2) = 0 \\ \lim_{\phi_{\delta'} \rightarrow 0} \phi_\alpha &= \phi_{\delta'} \sin(\theta) \sin(\phi = \pi/2) = \phi_{\delta'} \sin(\theta) \\ \lim_{\phi_{\delta'} \rightarrow 0} \phi_\delta &= \phi_{\delta'} \cos(\theta). \end{aligned} \quad (17)$$

Ces résultats sont vrais quelque soit l'ordre des opérations du membre de droit de l'équation (13). Pour  $\phi_{\delta'}$  très petit mais non nul on a avec une très bonne approximation :

$$\begin{aligned} \phi_\Gamma &\simeq 0 \\ \phi_\alpha &\simeq \phi_{\delta'} \sin(\theta) \\ \phi_\delta &\simeq \phi_{\delta'} \cos(\theta) \end{aligned} \quad (18)$$

de sorte que :

$$\phi_\Gamma^2 + \phi_\alpha^2 + \phi_\delta^2 \simeq \phi_{\delta'}^2. \quad (19)$$

Ainsi nous constatons que l'angle de rotation  $\phi_{\delta'}$  entre deux NAO autour de l'axe  $\delta'$  se comporte, lorsqu'il est très petit, comme étant le module ou longueur d'un vecteur fictif orienté dans la direction  $\delta'$  par rapport à un système de trois axes perpendiculaires  $\Gamma$ ,  $\alpha$  et  $\delta$  et que les composantes ou longueurs des projections de ce vecteur fictif sur ces axes sont égales aux angles de rotation  $\phi_\Gamma$ ,  $\phi_\alpha$  et  $\phi_\delta$  respectivement.

### 3.2 Invariance sous Rotation

Considérons maintenant un autre trièdre droit (non montré) composé de ses trois axes perpendiculaires  $\Gamma_1$  ( $= \Gamma$ ),  $\alpha_1$  et  $\delta_1$ . Ce trièdre est tourné par rapport au trièdre  $\Gamma$ ,  $\alpha$  et  $\delta$  d'un angle quelconque autour de l'axe commun  $\Gamma$ . Par rapport au trièdre  $\Gamma$ ,  $\alpha_1$  et  $\delta_1$  l'axe  $\delta'$  fait un angle  $\theta'$  par rapport à  $\delta_1$ . Relativement au nouveau trièdre l'équation (13) devient :

$$R_{\delta'}(\phi_{\delta'}) = R_{\alpha_1}(\phi_{\alpha_1})R_\Gamma(\phi_\Gamma)R_{\delta_1}(\phi_{\delta_1}) \quad (20)$$

de sorte que pour  $\phi_{\delta'}$  très petits les composantes ou projections  $\phi_\Gamma$ ,  $\phi_{\alpha_1}$  et  $\phi_{\delta_1}$  selon les axes  $\Gamma$ ,  $\alpha_1$  et  $\delta_1$  sont telles que :

$$\phi_\Gamma^2 + \phi_{\alpha_1}^2 + \phi_{\delta_1}^2 \simeq \phi_{\delta'}^2. \quad (21)$$

De (19) et (21) on constate que le petit angle  $\phi_{\delta'}$  (qui est aussi la longueur d'un vecteur fictif dans la direction de l'axe  $\delta'$ ) est un invariant sous l'opération de rotation qui transforme un trièdre  $\Gamma$ ,  $\alpha$  et  $\delta$  en un autre trièdre  $\Gamma$ ,  $\alpha_1$  et  $\delta_1$ .

### 3.3 "Invariant de Lorentz"

Lorsqu'on remet "i" (qu'on a omis d'écrire pour simplifier la notation en début de section) en facteur :  $\theta \rightarrow i\eta$ ,  $\theta' \rightarrow i\eta'$ ,  $\phi_{\delta'} \rightarrow i\Phi_{\delta'}$ , les équations (6), (18), (19) et (21) nous conduisent à :

$$\phi_\alpha^2 - \Phi_\delta^2 \simeq \phi_{\alpha_1}^2 - \Phi_{\delta_1}^2 \quad (22)$$

où tous les angles dans (22) sont des réels. Rappelons que  $\alpha = c'$ , où  $c'$  est un axe d'espace[1] dont l'angle réel  $\phi_{c'}$  ( $\equiv \phi_\alpha$ ) se décompose sur trois axes perpendiculaires d'espace a, b et c :

$$\phi_a^2 + \phi_b^2 + \phi_c^2 \simeq \phi_{c'}^2. \quad (23)$$

Il en est de même pour l'axe d'espace  $\alpha_1$ .

Le résultat (22) concerne l'angle de rotation autour d'un même axe de rotation (i.e.  $\delta'$ ) entre deux NAO. Cet angle imaginaire,  $\phi_{\delta'}$ , est "projeté" sur deux systèmes d'axes de rotation, temps et espace, différents (i.e.  $(\Gamma, \alpha, \delta)$  et  $(\Gamma, \alpha_1, \delta_1)$  simplement tournés l'un par rapport à l'autre). Le résultat (22) n'est pas sans rappeler l'invariant (d'espace-temps) de Lorentz de la relativité restreinte entre deux systèmes de coordonnées inertiels en

mouvement relatif. Avec les NAO nous verrons, annexe B, que l'angle entre les systèmes  $(\Gamma, \alpha, \delta)$  et  $(\Gamma, \alpha_1, \delta_1)$  mimique le mouvement relatif entre deux systèmes physiques inertiels. L'introduction du facteur "i" transforme l'invariant sous rotation en un "invariant de Lorentz". Avec (22)-(23) on peut parler d'une "métrique" (+,+,+,-) semblable à celle d'un espace-temps lorentzien. Voir annexe B pour l'obtention des transformations de Lorentz entre petits angles.

## 4 Comportement à grande échelle.

Jusqu'à maintenant les résultats obtenus ne concernent que deux NAO avec un très petit angle imaginaire  $\phi_{\delta'}$  les séparant le long d'un axe de rotation commun  $\delta'$  (i.e. axe de "temps"). Pour passer au comportement à grande échelle nous allons considérer des suites ou chaînes de NAO en procédant comme dans le premier article[1] avec en plus l'utilisation d'angles imaginaires.

Soit un NAO de référence NR et une suite de N (i.e. N est un entier  $N > 1$ ) NAO tous de même axe de rotation  $\delta'$  que NR. Soit  $j \leq N$  un entier qui indice chaque NAO le long de la suite. On notera  $N_j$  le NAO d'indice j de la suite. NR porte l'indice  $j=0$ . Tournons chaque  $N_j$  autour de l'axe  $\delta'$  conformément à l'opération de rotation  $R_{\delta'}(j\phi_{\delta'})$  où  $\phi_{\delta'} = i\Phi_{\delta'}$  et où  $\Phi_{\delta'}$  est un angle réel très petit :

$$R_{\delta'}(j\phi_{\delta'}) = \prod_{n=1}^j R_{\delta'}(\phi_{\delta'}) \quad (24)$$

ou, en utilisant (13) :

$$R_{\delta'}(j\phi_{\delta'}) = \prod_{n=1}^j R_{\Gamma}(\phi_{\Gamma}) R_{\alpha}(\phi_{\alpha}) R_{\delta}(\phi_{\delta}) . \quad (25)$$

Par rapport à NR un NAO quelconque  $N_j$  a pour angles :

$$\psi_{\delta'} \equiv j \phi_{\delta'} = j i\Phi_{\delta'} \quad (26)$$

autour de l'axe  $\delta'$  ainsi que :

$$\psi_{\delta} \equiv j \phi_{\delta} \simeq j i\Phi_{\delta'} \cos(i\eta) \quad (27)$$

$$\psi_{\Gamma} \equiv j \phi_{\Gamma} \simeq 0 \quad (28)$$

et

$$\psi_{\alpha} \equiv j \phi_{\alpha} \simeq j i\Phi_{\delta'} \sin(i\eta) \quad (29)$$

autour des axes  $\delta, \Gamma$  et  $\alpha$  respectivement. Nous avons utilisé ci-dessus les expressions en (18) ainsi que  $\theta = i\eta$  où  $\eta$  est un angle réel. Soulignons que les grands angles  $\psi$  ci-dessus ne concernent qu'une seule suite (ou chaîne) dont l'axe de rotation est  $\delta'$ .

### 4.1 Projections suivant les axes $\alpha$ et $\delta$ .

Sur le même NR nous pouvons nous intéresser à un autre axe de rotation que  $\delta'$  comme par exemple  $\delta$  et rechercher une autre suite (ou chaîne) de NAO d'axe de rotation parallèle à  $\delta$ , séparés les uns des autres par un angle constant  $i\Phi_{\delta'}$ . Le "i" est nécessaire car l'axe  $\delta$  est un axe de temps. (N.B. Si nous considérons l'axe  $\alpha$  au lieu de  $\delta$ , l'angle de séparation entre les NAO "voisins" sera  $\Phi_{\delta'}$  au lieu de  $i\Phi_{\delta'}$  car  $\alpha$  est un axe d'espace.) Nous avons utilisé le même angle réel  $\Phi_{\delta'}$  que pour l'axe  $\delta'$  afin de conserver la même unité angulaire. Soit  $j_{\delta}$  l'entier qui indice chaque NAO (noté  $N_{j_{\delta}}$ ) de la suite selon l'axe  $\delta$  avec  $j_{\delta} = 0$  pour NR. Il s'en suit que selon l'axe  $\delta$ ,  $N_{j_{\delta}}$  fait un angle  $\eta_{\delta}$  par rapport à NR :

$$\eta_{\delta} = j_{\delta} i\Phi_{\delta'} . \quad (30)$$

Nous imposons :

$$\eta_{\delta} \simeq \psi_{\delta} , \quad (31)$$

la stricte égalité n'est pas possible puisque  $j_{\delta}$  doit être un entier. De (27), (30) et (31) on tire :

$$j_{\delta} \simeq j \cos(i\eta) \quad (32)$$

où j est l'entier selon l'axe de rotation  $\delta'$ . Ce que nous venons de faire pour l'axe  $\delta$  nous pouvons le refaire pour l'axe  $\alpha$ . Dans ce cas, en lieu et place de (30), (31) et (32) on a :

$$\eta_{\alpha} = j_{\alpha} \Phi_{\delta'} \quad (33)$$

$$\eta_{\alpha} \simeq \psi_{\alpha} , \quad (34)$$

et

$$j_{\alpha} \simeq j i \sin(i\eta) . \quad (35)$$

Par ailleurs, nous exigeons que :

$$R_{\delta'}(\Psi_{\delta'}) = R_{\Gamma}(0)R_{\alpha}(\eta_{\alpha})R_{\delta}(\eta_{\delta}) \quad (36)$$

c'est à dire que la rotation autour de  $\delta'$  avec un grand angle  $\Psi_{\delta'}$  doit mener au même résultat que si on tourne autour de  $\delta$  puis  $\alpha$  avec de grands angles  $\eta_{\delta}$  et  $\eta_{\alpha}$  respectivement. On peut démontrer à partir de (36) et de la définition des opérations de rotation (voir annexe A) que ceci n'est possible que si tous ces grands angles sont des multiples entiers de  $2\pi$  :

$$\Psi_{\delta'} = i2\pi m_{\delta'} \quad (37)$$

$$\eta_{\alpha} = 2\pi m_{\alpha} , \quad (38)$$

$$\eta_{\delta} = i2\pi m_{\delta} \quad (39)$$

avec  $m_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  où  $k \equiv \delta, \alpha, \delta'$  et ce quelque soit l'ordre des opérations de rotation du membre de droite de (36). De (26) et (37) on doit donc avoir :

$$j = \frac{2\pi}{\Phi_{\delta'}} m_{\delta'} , \quad (40)$$

de (33) et (38) puis (40) il faut que :

$$j_{\alpha} = \frac{2\pi}{\Phi_{\delta'}} m_{\alpha} = j \frac{m_{\alpha}}{m_{\delta'}} , \quad (41)$$

et enfin, (30), (39) et (40) imposent que :

$$j_{\delta} = \frac{2\pi}{\Phi_{\delta'}} m_{\delta} = j \frac{m_{\delta}}{m_{\delta'}} . \quad (42)$$

Si on compare (35) à (41) puis (32) à (42) alors :

$$\frac{m_{\alpha}}{m_{\delta'}} \simeq i \sin(i\eta) \quad (43)$$

et

$$\frac{m_{\delta}}{m_{\delta'}} \simeq \cos(i\eta) \quad (44)$$

respectivement. Ces approximations sont possibles et d'autant meilleures, pour toute valeur de l'angle  $i\eta$ , que si les entiers  $m_{\delta'}$ ,  $m_{\delta}$  et  $m_{\alpha}$  sont très grands. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, nous aurons pour les "projections"

de  $j$  sur les axes  $\delta$  et  $\alpha$  un comportement de quadrivecteurs à grande échelle (i.e. grands  $j$ ) :

$$j_{\delta}^2 - j_{\alpha}^2 \simeq j^2 . \quad (45)$$

Rappelons que le résultat précédent concerne trois chaînes de NAO ; selon l'axe  $\delta$ , l'axe  $\alpha$  et l'axe  $\delta'$ . Notons que  $\alpha \equiv c'$  (i.e. axe d'espace) et selon [1], éq. (38) :

$$j_a^2 + j_b^2 + j_c^2 \simeq j_{c'}^2 \quad (46)$$

(soulignons que dans [1], éq. (38), on utilisait le symbole  $j$  pour représenter  $j_{c'}$ . Dans le présent article, le symbole  $j$  représente  $j_{\delta'}$ ).

Ce que nous venons de faire avec le système d'axes  $(\alpha, \delta)$  nous pouvons le refaire avec le système d'axes  $(\alpha_1, \delta_1)$  de la section §3.2 de sorte que, en bout de ligne, nous aurons :

$$j_{\delta_1}^2 - j_{\alpha_1}^2 \simeq j^2 . \quad (47)$$

Ceci nous amène à conclure que :

$$j_{\delta}^2 - j_{\alpha}^2 \simeq j_{\delta_1}^2 - j_{\alpha_1}^2 \quad (48)$$

ce qui est l'invariant de Lorentz à grande échelle (voir §3.3, éq. (22)).

## 5 Espace-temps lorentzien 3d+1

Dans l'article [1] à la section §5.1 éq. (39) nous avons défini l'élément de longueur par :  $\Delta l \equiv \xi \Phi_{c'}$ . Nous étions alors en 3d. Ici, en 3d+1, nous généralisons cette définition. Nous faisons l'hypothèse que l'angle réel  $\Phi_{\delta'}$  est l'angle minimal de rotation selon l'axe  $\delta'$  entre deux NAO plus proches voisins et ce *quelque soit* l'axe  $\delta'$  (i.e. comme on l'a vu si  $\delta'$  est un axe de temps, on multiplie  $\Phi_{\delta'}$  par "i" mais cela ne change pas sa grandeur). Cet angle minimal est une constante indépendante de l'axe choisi. On définit l'interval d'espace et de temps par la relation :

$$\Delta l = c\Delta t \equiv \xi \Phi_{\delta'} . \quad (49)$$

$c$  est la vitesse de la lumière et  $\xi$  une constante ayant les unités d'une longueur. En multipliant (49) par  $j$  on obtient la longueur (ou durée) à grande échelle selon l'axe  $\delta'$  :

$$l = j\Delta l = ct = cj\Delta t \equiv \xi j \Phi_{\delta'} . \quad (50)$$

En multipliant (48) par  $\Delta l$  (ou  $c\Delta t$ ) on trouve :

$$(ct)^2 - l^2 \simeq (ct_1)^2 - l_1^2, \quad (51)$$

où :

$$\begin{aligned} t &\equiv j_\delta \Delta t \\ t_1 &\equiv j_{\delta_1} \Delta t \\ l &\equiv j_\alpha \Delta l \\ l_1 &\equiv j_{\alpha_1} \Delta l. \end{aligned} \quad (52)$$

Le résultat (51) montre que l'intervalle d'espace-temps (à grande échelle) de deux systèmes de coordonnées est un invariant. Ceci caractérise un espace-temps lorentzien (plat) ou quasi-lorentzien car nous n'avons pas une parfaite égalité. Il s'agit d'un espace-temps discret et non d'un continuum et, comme pour l'espace euclidien [1], ce comportement lorentzien n'est valide qu'à de grandes échelles (i.e. grand  $j$ ).

## 6 Conclusion

Dans le présent article nous avons montré comment le NAO devait être défini pour faire apparaître un espace-temps  $3d+1$ . Cinq axes de rotation sont nécessaires (NAO 5D); chaque NAO possède trois axes "d'espace", un de "temps" et un de "mouvement" (i.e.  $\Gamma$ ). Ces axes sont amalgamés dans un produit tensoriel (fig. 1). Contrairement aux axes "d'espace", l'axe de "temps" et de "mouvement" ont des angles de rotation imaginaires. Ceci vient corriger une lacune présente dans l'article : "II. The Ibozoo uu and Accelerated Observers in flat Space-Time" [2] où nous avons utilisé des angles réels pour le temps, l'espace et l'axe  $\Gamma$ . Nous avons alors noté qu'il était possible d'obtenir un résultat conforme à celui de la relativité (i.e. accélération hyperbolique) si on introduisait, de manière ad hoc, le facteur imaginaire "i".

Nous avons aussi montré dans le présent article comment, à partir des NAO 5D, on peut construire un espace-temps  $3d+1$  lorentzien (plat) discret sur de grandes échelles de longueur (ou de temps).

## 7 Annexe A

Lorsqu'il s'agit d'angles réels, il n'est pas difficile de faire la démonstration à laquelle cette annexe fait

référence. Mais lorsque les angles de rotation sont imaginaires comment fait-on ? Reprenons par exemple l'éq. (8) :

$$R_{\delta'}(\phi_{\delta'}) = \cos(\phi_{\delta'}/2)\sigma_o - i \sin(\phi_{\delta'}/2)(\sigma \cdot \delta'). \quad (53)$$

Supposons que l'angle  $\phi_{\delta'}$  est un angle de rotation imaginaire quelconque autour d'un axe quelconque  $\delta'$  :  $\phi_{\delta'} \equiv i\Phi_{\delta'}$  où  $\Phi_{\delta'}$  est réel. La difficulté vient de l'évaluation de  $\cos(i\Phi_{\delta'}/2)$  et  $\sin(i\Phi_{\delta'}/2)$ . Or, il faut se rappeler qu'en §2.2, éq. (6), nous avons déjà rencontré cette situation puisque la rotation se faisait autour de l'axe de rotation  $\Gamma$  avec un angle imaginaire  $i\eta$ . Les résultats en (6) doivent donc s'appliquer ici aussi :

$$\begin{aligned} \cos(i\Phi_{\delta'}/2) &= \frac{\text{sign}(\cos(\Phi_{\delta'}/2))}{\sqrt{1 + (i \tan(\Phi_{\delta'}/2))^2}} \\ \sin(i\Phi_{\delta'}/2) &= \frac{-i |\tan(\Phi_{\delta'}/2)| \text{sign}(\sin(\Phi_{\delta'}/2))}{\sqrt{1 + (i \tan(\Phi_{\delta'}/2))^2}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Il est alors facile de vérifier que :

$$R_{\delta'}(i2\pi m_{\delta'}) = \text{sign}(\cos(\pi m_{\delta'}))\sigma_o = (-1)^{m_{\delta'}} \sigma_o, \quad (55)$$

où  $m_{\delta'} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Il faut noter que pour un angle réel tel  $\eta_\alpha = 2\pi m_\alpha$  où  $m_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , on a :

$$R_\alpha(2\pi m_\alpha) = (-1)^{m_\alpha} \sigma_o. \quad (56)$$

Il faut aussi noter que, compte tenu de ce qui précède, l'introduction de (37) à (39) dans (36) implique que (36) sera satisfaite que si la parité du nombre ( $m_\alpha + m_\delta$ ) est la même que celle du nombre  $m_{\delta'}$ .

## 8 Annexe B

On peut obtenir les transformations de Lorentz pour les très petits angles de rotation de la façon suivante. Considérons les deux trièdres droits (non montrés) composé pour l'un de ses trois axes perpendiculaires ( $\Gamma$ ,  $\alpha_1$  et  $\delta_1$ ) et pour l'autre ( $\Gamma$ ,  $\alpha$  et  $\delta$ ). Ces trièdres sont tournés l'un par rapport à l'autre d'un angle  $\omega$  autour de l'axe commun  $\Gamma$ . Puisque les petits angles de rotation ont un comportement vectoriel nous pouvons les écrire comme des vecteurs. Ainsi, par rapport à ( $\Gamma$ ,  $\alpha$  et  $\delta$ ), le vecteur  $\phi_{\delta'}\delta'$  est donné par :

$$\phi_{\delta'}\delta' = \phi_\delta\delta + \phi_\alpha\alpha. \quad (57)$$

Par rapport à  $(\Gamma, \alpha_1 \text{ et } \delta_1)$  le même vecteur s'écrit :

$$\phi_{\delta'} \delta' = \phi_{\delta_1} \delta_1 + \phi_{\alpha_1} \alpha_1 . \quad (58)$$

On peut vérifier que les axes (vecteurs unitaires) se transforment formellement comme suit (rotation plane comme en (3)) :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix} . \quad (59)$$

À partir de (57), (58) et (59) il est facile de montrer que :

$$\begin{aligned} \phi_{\delta} &= \phi_{\delta_1} \cos(\omega) - \phi_{\alpha_1} \sin(\omega) \\ \phi_{\alpha} &= \phi_{\delta_1} \sin(\omega) + \phi_{\alpha_1} \cos(\omega) . \end{aligned} \quad (60)$$

Introduisons le facteur "i" pour les angles de temps et pour  $\omega$  (i.e.  $\phi_{\delta} = i\Phi_{\delta}$ ,  $\phi_{\delta_1} = i\Phi_{\delta_1}$  et  $\omega = i\Omega$ , où  $\Phi_{\delta}$ ,  $\Phi_{\delta_1}$  et  $\Omega$  sont des réels). Les éqs. en (60) deviennent alors :

$$\begin{aligned} i\Phi_{\delta} &= i\Phi_{\delta_1} \cos(i\Omega) - \phi_{\alpha_1} \sin(i\Omega) \\ \phi_{\alpha} &= i\Phi_{\delta_1} \sin(i\Omega) + \phi_{\alpha_1} \cos(i\Omega) . \end{aligned} \quad (61)$$

En utilisant les expressions en (6) dans (61) et en faisant le changement  $\eta \rightarrow \Omega$  on obtient, après avoir simplifié par i de part et d'autre des égalités et avoir supposé que  $\Omega \leq \pi/4$  :

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta} &= \bar{\gamma}(\Phi_{\delta_1} + \bar{\beta}\phi_{\alpha_1}) \\ \phi_{\alpha} &= \bar{\gamma}(\phi_{\alpha_1} + \bar{\beta}\Phi_{\delta_1}) , \end{aligned} \quad (62)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &\equiv |\tan(\Omega)| , \\ \bar{\gamma} &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{\beta}^2}} . \end{aligned} \quad (63)$$

À titre de comparaison, les transformations de Lorentz de la relativité restreinte sont données par :

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct_1 + \beta x_1) \\ x &= \gamma(x_1 + \beta ct_1) \end{aligned} \quad (64)$$

où

$$\begin{aligned} \beta &\equiv v/c , \\ \gamma &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} . \end{aligned} \quad (65)$$

$c$  est la vitesse de la lumière et  $v$  est la vitesse relative de translation des deux systèmes de coordonnées  $(x, t)$  et  $(x_1, t_1)$ . On peut voir ci-dessus que  $\tan(\Omega)$  mimique  $v/c$ . L'angle  $\Omega$  (ou  $i\Omega$ ) qui est l'angle (de rotation dans la direction de  $\Gamma$ ) entre deux systèmes d'axes détermine leur "mouvement relatif".  $\Omega = \pi/4$  correspond à  $v = c$ .

## Références

- [1] Servant, B., "Génération d'un Espace Euclidien Discret Tridimensionnel à partir des NAO", 10 déc. 2014. bservant05.blogspot.com
- [2] <http://www.ummo-sciences.org/activ/science/ibozoo>